2021 年 12 月 27 日配布

数学演習 IIA 追加：連続写像と線形写像

$\boxed{1}$ [線型写像の２つの条件のうち、片方からもう一方が導けるか]　$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \qquad x,y\in\mathbb{R}$$

を満たす写像とする。この時、

$$f(kx)=kf(x) \qquad k,x\in\mathbb{R}$$

が成り立つかどうかを考えたい。次を示せ。

(1) $f(0)=0$, $f(-x)=-f(x)$.

(2) 任意の $k\in\mathbb{Z}$ と $x\in\mathbb{R}$ に対して $f(kx)=kf(x)$.

(3) 任意の $k\in\mathbb{Q}$ と $x\in\mathbb{R}$ に対して $f(kx)=kf(x)$.

(4) f が有界であれば、$f=0$.

(5) $f(1)=0$ であり、f が原点で連続であれば、f は有界である。

(6) f が原点で連続であれば、全ての $x\in\mathbb{R}$ に対して $f(x)=f(1)x$.

(7) f が原点で連続であれば、全ての $k,x\in\mathbb{R}$ に対して、$f(kx)=kf(x)$.

$\boxed{2}$ [同じ問題、次元の高い場合]　写像 $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ は原点で連続であり、条件

$$g(\mathbf{x}+\mathbf{y})=g(\mathbf{x})+g(\mathbf{y}) \qquad \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^m$$

を満たすとする。この時、全ての $k\in\mathbb{R},\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m$ に対して $g(k\mathbf{x})=kg(\mathbf{x})$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{3}$ 線型写像 $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ を考える。

(1) g は連続写像であることを示せ。

(2) g のヤコビアンを求めよ。

(3) g の２階微分を求めよ。

(4) g の k 階微分 $(k\geq 2)$ を求めよ。

(5) g は無限回微分可能な関数 (つまり、C^∞ 級) であることを示せ。

ヒント $\boxed{1}$(1) は数学的帰納法。(1) から (2)。(2) から (3)。(2) から「(4) の対偶」。(3) から (5)。「(4) と (5) とちょっとした工夫」から (6)。(6) から (7)。(7) から $\boxed{2}$。