2021 年 1 月 12 日

数学演習 IIA-10 回目の略解：行列の多項式

$\boxed{1}$ (1) $A^2+t^2E=\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$, $A^3=-t^2A$.

(2) $A^{2n+1}=(-t^2)^nA$.

(3) $A^{2n}=(-t^2)^{n-1}A^2$.

(4) $$\exp(A)=E+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}A^{2k+1}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}A^{2k}$$
$$=E+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}(-t^2)^kA+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}(-t^2)^{k-1}A^2.$$

$\boxed{2}$ (1) $\lambda_1=1, \lambda_2=-1, \lambda_3=-2$.

(3) $P_1=\begin{pmatrix} -8 & 10 & 4 \\ -4 & 5 & 2 \\ -8 & 10 & 4 \end{pmatrix}$, $P_2=\begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & -8 & -2 \end{pmatrix}$, $P_3=\begin{pmatrix} 6 & -6 & -3 \\ 4 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

(4) $P_1P_2=O, P_2P_3=O, P_3P_1=O$.

(5) $P_1^2=P_1, P_2^2=P_2, P_3^2=P_3$, $P_1+P_2+P_3=E, \lambda_1P_1+\lambda_2P_2+\lambda_3P_3=A$.

(6) P_1, P_2, P_3 の固有値は $1, 0$。固有値 1 の固有空間は全て 1 次元で、

$W_{P_1}(1)=\mathbb{C}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $W_{P_2}(1)=\mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $W_{P_3}(1)=\mathbb{C}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

固有値 0 の固有空間は全て 2 次元で、$W_{P_1}(0)=W_{P_2}(1)+W_{P_3}(1)$, $W_{P_2}(0)=W_{P_1}(1)+W_{P_3}(1)$, $W_{P_3}(0)=W_{P_1}(1)+W_{P_2}(1)$.

- なお、$P_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $P_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, $P_3=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ と表示することができ、P_1, P_2, P_3 の階数はどれも 1 である。

$\boxed{3}$ (1) $\lambda_1=2, \lambda_2=-1$.

(2) $N=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 6 & -12 & 15 \\ 4 & -8 & 10 \end{pmatrix}$, $S=\begin{pmatrix} 8 & -18 & 24 \\ 3 & -7 & 12 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

(3) $N^2=O, SN-NS=O, f(S)=O, S+N=A$.

(4) S も A も固有値は $2, -1$ である。

$$W_S(-1)=W_A(-1)=\mathbb{C}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, W_A(2)=\mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\subset W_S(2)=\mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}+\mathbb{C}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$