

2021年12月22日配布

## 数学演習 IIA-10 回目：行列の多項式

1 [ロドリゲスの公式]  $A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$  とする。簡単のため  $t = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$  とおく。

- (1)  $A^2, A^2 + t^2 E, A^3$  を求めよ。
- (2)  $A^{2n+1}$  を  $A$  と  $t$  で表せ。
- (3)  $A^{2n}$  を  $A^2$  と  $t$  で表せ。
- (4)  $\exp(A) = E + \frac{\sin t}{t} A + \frac{1 - \cos t}{t^2} A^2$  を示せ。

2 [スペクトル分解]  $A = \begin{pmatrix} -23 & 26 & 11 \\ -12 & 13 & 6 \\ -18 & 22 & 8 \end{pmatrix}$  とする。 $A$  の固有値を  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  とする。多項式

$$f_1(x) = \frac{(x - \lambda_2)(x - \lambda_3)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}, \quad f_2(x) = \frac{(x - \lambda_1)(x - \lambda_3)}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)}, \quad f_3(x) = \frac{(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)},$$

を用いて、行列  $P_1 = f_1(A), P_2 = f_2(A), P_3 = f_3(A)$  と定義する。

- (1)  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  を求めよ。
- (2)  $f_1, f_2, f_3$  を求めよ。
- (3)  $P_1, P_2, P_3$  を求めよ。
- (4)  $P_1 P_2, P_2 P_3, P_3 P_1$  を求めよ。
- (5)  $P_1^2, P_2^2, P_3^2, P_1 + P_2 + P_3, \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3$  を求めよ。
- (6)  $P_1, P_2, P_3$  の固有値と固有空間を求めよ。

3 [ジョルダン分解]  $A = \begin{pmatrix} 10 & -22 & 29 \\ 9 & -19 & 27 \\ 4 & -8 & 12 \end{pmatrix}$  の固有多項式は  $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2(\lambda - \lambda_2)$  と因数分解できている。2つの多項式  $f, g$  を

$$f(x) = \frac{(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad g(x) = x - f(x)$$

と定義する。行列  $N, S$  を  $N = f(A), S = g(A)$  と定義する。

- (1)  $\lambda_1, \lambda_2$  を求めよ。
- (2)  $f(x), g(x), N, S$  を求めよ。
- (3)  $N^2, SN - NS, f(S), S + N$  を求めよ。
- (4)  $S$  の固有値と固有空間、 $A$  の固有値と固有空間を求めよ。