2021年1月19日配布分

数学演習 IIA-12 回目の略解：内積、行列の冪

$\boxed{1}$ (1)

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{c}, \mathbf{u}\rangle &= \langle \mathbf{b} - \langle \mathbf{b}, \mathbf{u}\rangle\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle && \mathbf{c}\text{ の定義}\\
&= \langle \mathbf{b}, \mathbf{u}\rangle - \langle \mathbf{b}, \mathbf{u}\rangle\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle && \text{内積の第１成分に関する線形性}\\
&= \langle \mathbf{b}, \mathbf{u}\rangle - \langle \mathbf{b}, \mathbf{u}\rangle \|\mathbf{u}\|^2 && \text{内積を用いたノルムの表示}\\
&= \langle \mathbf{b}, \mathbf{u}\rangle - \langle \mathbf{b}, \mathbf{u}\rangle && \mathbf{u}\text{ のノルムに対する仮定}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{c}\|^2 &= \langle \mathbf{c}, \mathbf{c}\rangle\\
&= \langle \mathbf{b} - \langle \mathbf{b}, \mathbf{u}\rangle\mathbf{u}, \mathbf{b} - \langle \mathbf{b}, \mathbf{u}\rangle\mathbf{u}\rangle\\
&= \langle \mathbf{b}, \mathbf{b}\rangle - 2\langle \mathbf{b}, \mathbf{u}\rangle\langle \mathbf{b}, \mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{u}\rangle^2\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle\\
&= \|\mathbf{b}\|^2 - \langle \mathbf{b}, \mathbf{u}\rangle^2.
\end{aligned}$$

ここで２つ目の等号では、p215, line 9 の公式

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \|\mathbf{y}\|^2$$

を用いている。(p215, line 3 から line 5 の計算が参考になる。)

(3) (2) の左辺が非負なので。

(4) $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ の時は、両辺とも 0 なので等号が成立する。以下 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ とする。$\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$ とする。この時、

$$\|\mathbf{u}\| = \left\|\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}\right\| = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\|\mathbf{a}\| = 1$$

であるので (3) を使うことができる。この時、(3) の左辺は

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{u}\rangle^2 = \langle \mathbf{b}, \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}\rangle^2 = \left(\frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\langle \mathbf{b}, \mathbf{a}\rangle\right)^2 = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|^2}\langle \mathbf{b}, \mathbf{a}\rangle^2$$

となるので、両辺に $\|\mathbf{a}\|^2$ をかければ (4) を得る。

- コメント：２次元の標準内積の場合には、$\mathbf{b}$ を斜辺、$\mathbf{c}$ と $\langle \mathbf{b}, \mathbf{u}\rangle\mathbf{u}$ を直角を挟んだ２辺とするような直角三角形を描くと意味が読み取りやすい。ただし、証明では幾何学的な直感を使わずに内積の性質だけから論述する。

$\boxed{2}$ (1) $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) 固有値は $1, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0$. 固有空間は、$W(1) = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$,

$$W(\frac{2}{3}) = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}), \quad W(-\frac{1}{3}) = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}), \quad W(0) = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

(3) $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすると、$AP = P\Lambda$.

(4)

$$\begin{aligned} A^n &= (P\Lambda P^{-1})^n = P\Lambda^n P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{2}{3})^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-\frac{1}{3})^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1-(\frac{2}{3})^n & 1-(\frac{2}{3})^n & 1-(\frac{2}{3})^n \\ 0 & \frac{2}{3}(\frac{2}{3})^n + \frac{1}{3}(-\frac{1}{3})^n & \frac{2}{3}(\frac{2}{3})^n - \frac{2}{3}(-\frac{1}{3})^n & \frac{2}{3}(\frac{2}{3})^n + \frac{1}{3}(-\frac{1}{3})^n \\ 0 & \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n - \frac{1}{3}(-\frac{1}{3})^n & \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n + \frac{2}{3}(-\frac{1}{3})^n & \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n - \frac{1}{3}(-\frac{1}{3})^n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(5) $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \\ s_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \\ s_0 \end{pmatrix}$ であるので、

$$\begin{aligned}
q_n &= (\frac{2}{3}(\frac{2}{3})^n + \frac{1}{3}(-\frac{1}{3})^n)q_0 + (\frac{2}{3}(\frac{2}{3})^n - \frac{2}{3}(-\frac{1}{3})^n)r_0 + (\frac{2}{3}(\frac{2}{3})^n + \frac{1}{3}(-\frac{1}{3})^n)s_0 \\
&= \frac{2}{3}(\frac{2}{3})^n(q_0 + r_0 + s_0) + \frac{1}{3}(-\frac{1}{3})^n(q_0 - 2r_0 + s_0), \\
r_n &= (\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n - \frac{1}{3}(-\frac{1}{3})^n)q_0 + (\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n + \frac{2}{3}(-\frac{1}{3})^n)r_0 + (\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n - \frac{1}{3}(-\frac{1}{3})^n)s_0 \\
&= \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n(q_0 + r_0 + s_0) - \frac{1}{3}(-\frac{1}{3})^n(q_0 - 2r_0 + s_0), \\
s_n &= 0
\end{aligned}$$

となる。特に

$$q_n + r_n + s_n = (\frac{2}{3})^n(q_0 + r_0 + s_0)$$

となる。したがって、

$$\frac{r_n}{q_n + r_n + s_n} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^n \frac{q_0 - 2r_0 + s_0}{q_0 + r_0 + s_0}$$

と書ける。$n \to \infty$ での極限は $\dfrac{1}{3}$.

- 1 から 6 の目が出るサイコロの場合は、固有値は、$1, \dfrac{5}{6}, -\dfrac{1}{6}, 0$ であり、
  $\dim W(1) = 1, \dim W(\frac{5}{6}) = 1, \dim W(-\frac{1}{6}) = 2, \dim W(0) = 3$ である。
  上がっていない時に、ゴールまで 1 マス、2 マス、3 マス、4 マス、5 マスの地点にいる条件付き確率の $n \to \infty$ における極限は、それぞれ $\dfrac{5}{15}, \dfrac{4}{15}, \dfrac{3}{15}, \dfrac{2}{15}, \dfrac{1}{15}$ となる。

$\boxed{3}$ (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(2) 固有値は、$1, -2, 4$.

固有空間は $W(1) = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W(-2) = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}), \quad W(4) = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix})$.

.

(3) $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ とすると、$PA = A\Lambda$.

(4) $W(1)$ に属するベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対応する多項式は 1.

$W(-2)$ に属するベクトル $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対応する多項式は $-1 + x$.

$W(4)$ に属するベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対応する多項式は $1 - 2x + x^2$.

- 結果の解釈：つまり、多項式 $(x-1)^i$ は固有値 $(-2)^i$ に対応する固有ベクトルである。($i = 0, 1, 2$。) 実際、$x-1$ の x に $3-2x$ を代入すると、$(3-2x)-1 = 2-2x = -2(x-1)$ となるので、$x-1$ を変数として式を整理すると変数が -2 倍されることになる。
- 基底を用いない言い換え：線型写像 $S : f(x) \mapsto f(x-1)$, $U : f(x) \mapsto f(-2x)$ と定義すると、$T \circ S = S \circ U$ となっている。T, S, U の行列表示がそれぞれ A, P, Λ である。