2021 年 1 月 19 日配布

数学演習 IIA-12 回目：内積、行列の冪

$\boxed{1}$ [内積の性質：コーシー・シュワルツの不等式 (p214) の別証明]

V を内積空間とし、$\mathbf{u}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a} \in V$ とする。$\|\mathbf{u}\| = 1$ と仮定し $\mathbf{c} = \mathbf{b} - \langle \mathbf{b}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u}$ と定める。

(1) $\mathbf{c}$ と $\mathbf{u}$ は直交することを示せ。

(2) $\|\mathbf{c}\|^2$ を $\|\mathbf{b}\|$ と $\langle \mathbf{b}, \mathbf{u} \rangle$ を用いて表せ。

(3) $\langle \mathbf{b}, \mathbf{u} \rangle^2 \leq \|\mathbf{b}\|^2$ を示せ。

(4) $\langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle^2 \leq \|\mathbf{a}\|^2 \ \|\mathbf{b}\|^2$ を示せ。

$\boxed{2}$ [行列の冪 (p203, 例 6.27)、確率行列 (p12)]

1,2,3 の目が等確率に出るサイコロを用いて双六をする。例えば、「福岡市科学館、双六」で検索 `https://www.fukuokacity-kagakukan.jp/news/2021/12/vo11.html` を参照。ピッタリゴールを上がりの要件とする。適当に進んだ段階でゴールまで 3 マス以内にいるとする。その時点から n 回サイコロを振った時に、ゴールまで 0 マス、1 マス、2 マス、3 マスの地点にいる確率をそれぞれ p_n, q_n, r_n, s_n とする。(n は 0 以上の整数。)

(1) $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \\ s_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \\ s_n \end{pmatrix}$ となるような 4 次正方行列 A を求めよ。

(2) A の固有値と固有空間を求めよ。

(3) A を対角化せよ。

(4) 自然数 n に対して、A^n を求めよ。

(5) n 回サイコロを振った時にまだ上がっていない時に、ゴールまで 2 マスの地点にいる条件付き確率の $n \to \infty$ における極限を求めよ。

ヒント：

$\boxed{1}$ (1) を用いて (2) を示し、(2) を用いて (3) を示し、(3) を用いて (4) を示す。

$\boxed{2}$ これも順番に誘導に乗って計算していく。固有値は簡単な有理数である。

$\boxed{2}$ (1) 例えば A の第 1 列は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であり、A の第 4 列は $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ である。

$\boxed{2}$ (5) ゴールまで 2 マスの地点にいる条件付き確率は $\dfrac{r_n}{q_n + r_n + s_n}$。これを q_0, r_0, s_0, n を用いて表し、さらに $n \to \infty$ の極限を求めよ。

$\boxed{2}$ 発展問題：問題を拡張して $1, \ldots, 6$ の目が等確率に出るサイコロによる双六や、人生ゲーム (1 から 10 までが当確率に出るルーレット) の場合は固有値や固有ベクトルはどうなるか。

$\boxed{3}$ は裏面。

$\boxed{3}$ [表現行列、固有値・固有ベクトル、対角化] 問題 6.21(p199) の類題。
V を 2 次以下の多項式全体のなす線形空間、$T : f(x) \mapsto f(3-2x)$ を V の線形変換とする。T の固有値と固有ベクトルを求めよ。

ヒント：困ったら以下の誘導に乗ってください。(1)(2)(3) は中間試験の内容の復習です。

(1) V の基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する T の表現行列 A を求めよ。
(2) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ。
(3) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を一つ求めよ。
(4) T の固有値と固有ベクトルを求めよ。

困ってなかったら格好良く解いてもらっていいです。