問1(1). $A^{int} = (A^c)^{ext}$ を示せ。

復習 $\begin{cases} a \in A^{int} \Leftrightarrow \exists r>0 \text{ s.t. } B(a,r) \subset A \\ a \in C^{ext} \Leftrightarrow \exists r>0 \text{ s.t. } B(a,r) \subset C^c \end{cases}$

従って $a \in A^{int} \Leftrightarrow \exists r>0$ s.t. $B(a,r) \subset A$

$\Leftrightarrow \exists r>0$ s.t. $B(a,r) \subset (A^c)^c$

$\Leftrightarrow a \in (A^c)^{ext}$. //

---

(2) $A^{ext} = (A^c)^{int}$ を示せ.

$a \in A^{ext} \Leftrightarrow \exists r>0$ s.t. $B(a,r) \subset A^c$

$\Leftrightarrow a \in (A^c)^{int}$ //.

---

(2) ⇒ (1). の pf

(2) で $A = C^c$ とすると $(C^c)^{ext} = ((C^c)^c)^{int} = C^{int}$. これは(1) //

---

(1) ⇒ (2) の pf

(1) で $A = C^c$ とすると $(C^c)^{int} = ((C^c)^c)^{ext} = C^{ext}$. これは(2) //

問1 (3) $\partial A = \partial(A^c)$ を示せ.

$\boxed{\text{pf 1}}$ $a \in \partial A \iff {}^\forall r>0$, $B(a,r) \cap A \neq \phi$ かつ $B(a,r) \cap A^c \neq \phi$

$\iff {}^\forall r>0$ $B(a,r) \cap A^{cc} \neq \phi$ かつ $B(a,r) \cap A^c \neq \phi$

$\iff a \in \partial(A^c)$ //

$\boxed{\text{pf 2}}$ $\partial A = (A^{int} \cup A^{ext})^c$ を用いると.

$\partial(A^c) = ((A^c)^{int} \cup (A^c)^{ext})^c$

$\overset{(1)(2)}{=} (A^{ext} \cup A^{int})^c$

$= \partial A$ //

問2 $\left(\begin{array}{l}\text{(i) } \partial F \subset F \\ \text{(ii) } F \text{ は閉集合} \Leftrightarrow \text{(ii}'\text{) } F = \overline{F} \Leftrightarrow \text{(ii}''\text{) } F = F \cup \partial F\end{array}\right.$ の同値性の証

一般に $F \subset F \cup \partial F$ である。

(i) $\Rightarrow$ $F \cup \partial F \subset F$ ゆえ $F \cup \partial F = F$ (ii″).

(ii″) ならば $\partial F \subset F \cup \partial F = F$ (i) //

次への準備.

一般に $F^{ext} \subset F^c$ ∴ この式の補集合を考えると

$F^{int} \cup \partial F \supset F$.

∴ $F^{int} \cup \partial F \supset F \cup \partial F = \overline{F}$

逆に $F^{int} \subset F$ ゆえ

$F^{int} \cup \partial F \subset F \cup \partial F = \overline{F}$.

∴ $\boxed{F^{int} \cup \partial F = \overline{F}.}$

$\therefore$ (ii) $\Leftrightarrow$ (ii''') $F = F^{int} \cup \partial F$.

以上の準備の F で (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) F^c : 開集合 $\Leftrightarrow$ (iii') $F^c = (F^c)^{int}$

$\underset{問1(2)}{\Leftrightarrow}$ (iii'') $F^c = F^{ext}$.

(ii''') と (iii'') は互いに補集合の関係にあるので同値である

$\therefore$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii). //

(iii) $\Rightarrow$ (iv) の pf

$^\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \in F$ で, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ とする。$a \in F$ を示したい。

もし, $a \in F^c$ であるならば, (iii) より $\exists r > 0$ s.t. $B(a, r) \subset F^c$。

$\therefore$ $B(a, r)^c \supset F \ni a_n$.

$\therefore$ $|a_n - a| \geq r$.

これは, $\lim a_n = a$ に反する。矛盾

$\therefore$ $a \in F$. //

(iv) ⇒ (i) の pf. 選択公理を用いる。

$a \in \partial F$ とする。

$\forall r > 0$, $B(a, r) \cap F \neq \phi$ である。($B(a, r) \cap F^c \neq \phi$ でもあるが、その条件は以下では用いない)

$r = \frac{1}{m}$ とすると、

$B(a, \frac{1}{m}) \cap F \ni^{\exists} a_m$.

このとき $|a_m - a| < \frac{1}{m}$ ゆえ、$\lim_{m \to \infty} a_m = a$.

従って (iv) を用いることができて、$a \in F$. //

問3(2) $A=(0,1)$ は開集合.を示す。

(pf1) $\forall a\in A$ に対し. $a\in A^{int}$ を示す。即ち.

$\exists r>0$, s.t. $B(a,r)\subset A$ を示す。

$a\leqq\frac{1}{2}$ のときは. $B(a,a)=(0,2a)\subset(0,1)\subset A$.

$a>\frac{1}{2}$ のときは $B(a,1-a)=(1-2a,1)\subset(0,1)\subset A$. //

(なお, まとめて $r=\min(a,1-a)$ としてもよい.)

(pf2) $\partial A=\{0,1\}$.

$\therefore\ \partial A\cap A=\phi$

$\therefore\ A=A^{int}$.

問3(1) $C=[0,1]$：閉集合を示す.

(pf1) $\partial C=\{0,1\}$.

$\therefore \partial C\subset C$.

問2より. C：閉集合.

(pf2) $C^c=(-\infty,0)\cup(1,\infty)$：開集合を示す。

つまり $\forall a\in C^c$ に対し. $\exists r>0$ s.t. $B(a,r)\subset C^c$ を示す。

$a<0$ ならば $B(a,-a)\subset(-2a,0)\subset C^c$.

$a>1$ ならば $B(a,a-1)\subset(1,2a-1)\subset C^c$

//.

問4 $I_n = \left(2 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right)$

$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$

主張 $\boxed{A = \{2\}}$

$\{2\}$ ~~集~~は閉集合の証明は 問3(1)と同じ。

主張の pf $2 \in I_n$ ゆえ $2 \in A$.

逆に $a \neq 2 \Rightarrow a \notin A$ を示す。

$a > 2$ ならば $\frac{1}{a-2}$ より大きいある $n \in \mathbb{N}$ に対し $a \notin I_n$

$a < 2$ ならば $\frac{1}{2-a}$ より大きいある $n \in \mathbb{N}$ に対し $a \notin I_n$

$\therefore a \notin A$ //