2021 年 2 月 2 日配布

数学演習 IIA-14 回目：直交化、正規直交基底

$\boxed{1}$ [チェビシェフ多項式、例題 7.4(p230) や練習問題 7.8, 7.9(p232) の類題]
単項式 $1, x, x^2, \ldots, x^n$ を基底とする線形空間 V_n に次の内積を定義する。

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

(1) 多項式 $f, g \in V_n$ に対して、広義積分 $\langle f, g\rangle$ は絶対収束することを示せ。

(2) $\langle f, g\rangle$ が内積の条件を満たすことを確かめよ。

(3) 非負整数 m に対して、$I_m = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}}dx$ と定める。I_{m+2} と I_m の関係を求めよ。

(4) I_0, I_1 を求めよ。I_m を求めよ。

(5) k, l を非負整数とする。$f = x^k$, $g = x^l$ の時に、$\langle f, g\rangle$ を求めよ。

(6) V_3 の基底 $f_1 = 1, f_2 = x, f_3 = x^2, f_4 = x^3$ に Gram-Schmidt の直交化法を適用することで V_3 の正規直交基底 e_1, e_2, e_3, e_4 を求めよ。

$\boxed{2}$ [実対称行列の固有値と固有ベクトル, (例題 7.3, p229)] $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。

(1) A の固有値と固有空間を求めよ。

(2) A の線型独立な 3 本の固有ベクトルを $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ とする (例題 7.7(2))。この 3 本の順に Gram-Schmidt の直交化法を適用して、$\mathbb{R}^3$ の正規直交基底 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ を求めよ。

(3) $P = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{pmatrix}$ とする。P は直交行列であり、${}^tPAP$ は対角行列であることを確かめよ。

裏へ続く

$\boxed{3}$ [固有空間、直和、対角化可能性, 定理 6.13(p203)]
A を正則行列とし、$\lambda \in \mathbb{C}$ を 0 でない複素数とする。A の λ に対する固有空間を W_1 とし, A の $-\lambda$ に対する固有空間を W_2 とし, A^2 の λ^2 に対する固有空間を W_3 とする。

(1) $W_1 \subset W_3$ であることを示せ。なお、今後 $W_2 \subset W_3$ であることも用いて良い。

(2) $W_1 \cap W_2$ を求めよ。

(3) $\mathbf{v} \in W_3$ に対して、$\mathbf{v}_1 = (\lambda E + A)\mathbf{v}$ と定め、$\mathbf{v}_2 = (\lambda E - A)\mathbf{v}$ と定める。このとき、$\mathbf{v}_1 \in W_1$, $\mathbf{v}_2 \in W_2$, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = 2\lambda\mathbf{v}$ であることを示せ。

(4) $W_3 = W_1 \oplus W_2$ であることを示せ。

$\boxed{4}$ [可換な行列] 2 次の正方行列全体のなす線形空間を V とする。$E \in V$ を単位行列とする。$A \in V$ に対して、$Z(A) = \{X \in V \mid XA = AX\}$ と定める。

(1) $Z(A)$ は V の線形部分空間であることを示せ。

(2) $A \in V$ がスカラー行列でないとする。この時、$Z(A)$ は $\{E, A\}$ を基底とする 2 次元部分空間であることを示せ。

(3) $A \in V$ とする。A^2 がスカラー行列でないならば、$Z(A^2) = Z(A)$ であることを示せ。

(4) $A \in V$ はスカラー行列ではないが A^2 がスカラー行列であるとする。この時、$\mathrm{tr}(A) = 0$ かつ $A^2 = -\det(A)E$ であることを示せ。

ヒント：

$\boxed{1}$(3) $(\sqrt{1-x^2})'$ を参考にしつつ、部分積分を行う。

$\boxed{3}$ W_1, W_2, W_3 が $\mathbb{C}^n$ の線形部分空間であることの証明は省略して良い。

$\boxed{4}$(3) $Z(A) \subset Z(A^2)$ と次元の比較。

$\boxed{4}$(4) ケーリー・ハミルトンの定理。

出典：

$\boxed{2}$ 2020 年度入試 [1](1) `https://www.math.kyushu-u.ac.jp/etc/files/kiso2019.pdf`

$\boxed{3}$ 2022 年度入試 [2](3) `https://www.math.kyushu-u.ac.jp/etc/files/kiso2021.pdf`