2021 年 10 月 13 日実施分

数学演習 IIA-2 回目：略解

$\boxed{1}$ (1) も (2) も S は V の基底でない。

(1) S は V を生成しない。例えば、$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ が $E_{11} = aX + bY + cZ$ であったとすると、$(2,2)$ 成分を見比べて $0 = -c$ となるが、$(1,1)$ 成分を見比べると、$1 = c$ となるのでそのような c は存在しない。

補足：S の生成する部分空間 $\langle S \rangle$ は

$$\langle S \rangle = \{A \in V \mid \mathrm{tr}(A) = 0\}$$

である。$\mathrm{tr}(E_{11}) = 1 \neq 0$ なので $E_{11} \notin \langle S \rangle$ である。

(2) S は線型独立でない。実際、

$$f_3(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{6})\sin(x) + \sin(\frac{\pi}{6})\cos(x) = \frac{1}{2}f_1(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}f_2(x)$$

なので $f_3 = \frac{1}{2}f_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_2$ である。

$\boxed{2}$ $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ が線形独立であることの証明

実数 c_1, c_2, c_3 が $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ を満たすとする。この時、

$\mathbf{0} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ である。

$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ が線型独立であるから、$P \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ である。P が正則行列なので $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ である。したがって、$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ が線形独立であることが示された。

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ が V を生成することの証明

任意の $\mathbf{a} \in V$ を取る。$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ が V を生成するので、ある実数 b_1, b_2, b_3 が存在して、$\mathbf{a} = b_1\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2 + b_3\mathbf{u}_3$ となる。この式を変形して、

$\mathbf{a} = b_1\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2 + b_3\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ となる。したがって、$\mathbf{a}$ は $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ の線型結合であり、$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ が V を生成することを示せた。

$\boxed{3}$ (1) 問題$\boxed{2}$を使うと便利である。使わないとすると直接、連立一次方程式を解くか、あるいは次のように考えるかなど、色々な方法がある。

$\{f_1, f_2, f_3\}$ が線型独立であること。

実数 a, b, c が $af_1 + bf_2 + cf_3 = 0$ を満たしていたとする。

$x = -1$ を代入すると、$0 = af_1(-1) + bf_2(-1) + cf_3(-1) = 2a + 0 + 0 = 2a,$

$x = 0$ を代入すると、$0 = af_1(0) + bf_2(0) + cf_3(0) = 0 - b + 0 = b,$

$x = 1$ を代入すると、$0 = af_1(1) + bf_2(1) + cf_3(1) = 0 + 0 + 2c = 2c.$

したがって、$(a, b, c) = (0, 0, 0)$ となるので、$\{f_1, f_2, f_3\}$ は線型独立である。

$\{f_1, f_2, f_3\}$ が V を生成すること。

$h \in V$ とする。$k(x) = \frac{1}{2}h(-1)f_1(x) - h(0)f_2(x) + \frac{1}{2}h(1)f_3(x) - h(x)$ とおく。$k \in V$ である。

$k(-1) = \frac{1}{2}h(-1)f_1(-1) + 0 + 0 - h(-1) = 0,$

$k(0) = 0 - h(0)f_2(0) + 0 - h(0) = 0,$

$k(1) = 0 + 0 + \frac{1}{2}h(1)f_3(1) - h(1) = 0$

である。２次以下の多項式で３点 $x = -1, 0, 1$ で 0 となるので $k = 0$ である。したがって、$h = \frac{1}{2}h(-1)f_1 - h(0)f_2 + \frac{1}{2}h(1)f_3$ と書けたので、$\{f_1, f_2, f_3\}$ が V を生成することが示せた。

(2) $f_1 = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ であるから、$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ となる。したがって、$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.