

2021年10月27日出題分。11月10日公開。

数学演習 IIA-4 回目の略解：直和と次元

- 1 (1) $W_1 + W_3 = \text{Span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5)$ なので、 $(W_1 + W_3) \cap W_2 = \text{Span}(\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5)$.
(2) (1) を用いると $((W_1 + W_3) \cap W_2) \cap W_3 = \text{Span}(\mathbf{e}_4)$ がわかる。
別解： $((W_1 + W_3) \cap W_2) \cap W_3 = ((W_1 + W_3) \cap W_3) \cap W_2 = W_3 \cap W_2 = \text{Span}(\mathbf{e}_4)$.

- 2 答えは何通りもある。例えば次のようなものが答えになる。

(1) $\{E_{11} - E_{22}, E_{12} + E_{21}\}$.

(2) $\{E_{11} - E_{22}, E_{12} + E_{21}, E_{11} + E_{22}\}$.

(3) $\{E_{11} - E_{22}, E_{12} + E_{21}, E_{12} - E_{21}\}$.

(4) $\dim W_1 = 3, \dim W_2 = 3, \dim(W_1 \cap W_2) = 2, \dim(W_1 + W_2) = 4$.

(5) $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$ なので、直和でない。

- 3 $\mathbf{v}_1 \in W_1 \cap W_2 = \text{Span}(\mathbf{u}_1)$ なので、 $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 p_{11}$ である。

$\mathbf{v}_2 \in W_1 = \text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ なので、 $\mathbf{v}_2 = p_{12}\mathbf{u}_1 + p_{22}\mathbf{u}_2$ である。

$\mathbf{v}_3 \in W_2 = \text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3)$ なので、 $\mathbf{v}_3 = p_{13}\mathbf{u}_1 + p_{33}\mathbf{u}_3$ である。

したがって、
$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ 0 & p_{22} & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} \end{pmatrix}.$$