2021 年 10 月 27 日

数学演習 IIA-4 回目：直和と次元

$\boxed{1}$ $\mathbb{R}^6$ の標準基底を $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_6\}$ と書く。$W_1 := \mathrm{Span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, $W_2 := \mathrm{Span}(\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6)$, $W_3 := \mathrm{Span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_5)$ を $\mathbb{R}^6$ の部分空間とする。

(1) 部分空間 $(W_1 + W_3) \cap W_2$ の基底を一組求めよ。

(2) 部分空間 $((W_1 + W_3) \cap W_2) \cap W_3$ の基底を一組求めよ。

$\boxed{2}$ V を 2 次正方行列全体のなす線形空間とする。
W_1 を V に含まれる対称行列の全体、
W_2 を V に含まれるトレースが 0 の行列全体とする。

(1) $W_1 \cap W_2$ の基底 $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ を求めよ。

(2) (1) で求めた基底を延長して、W_1 の基底 $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s\}$ を求めよ。

(3) (1) で求めた基底を延長して、W_2 の基底 $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_t\}$ を求めよ。

(4) $\dim W_1,\ \dim W_2,\ \dim(W_1 \cap W_2),\ \dim(W_1 + W_2)$ を求めよ。

(5) 和空間 $W_1 + W_2$ は直和 $W_1 \oplus W_2$ であるかないかを答えよ。

$\boxed{3}$ 線形空間 V とその部分空間 W_1, W_2 と V の元 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ が次の 6 つの条件を全て満たしているとする。

(i) $\{\mathbf{u}_1\}$ は $W_1 \cap W_2$ の基底である。

(ii) $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ は W_1 の基底である。

(iii) $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3\}$ は W_2 の基底である。

(i') $\{\mathbf{v}_1\}$ は $W_1 \cap W_2$ の基底である。

(ii') $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ は W_1 の基底である。

(iii') $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$ は W_2 の基底である。

和空間 $W_1 + W_2$ の基底 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ から基底 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ を作る変換行列を P と書く。
すなわち、$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{pmatrix} P.$ この時、

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ 0 & p_{22} & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} \end{pmatrix}$$

であることを示せ。

- 補足

$\boxed{2}$ W_1, W_2 が部分空間であることは証明しなくて良い。

$\boxed{2}$ (4) 答えは r, s, t などの文字ではなく、0 以上の整数で答えよ。なお途中経過で r, s, t などを用いて構わない。

$\boxed{3}$ $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ や $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ が部分空間 $W_1 + W_2$ の基底になることは証明しなくて良い。