2021 年 12 月 2 日配布

数学演習 IIA-5 回目問題 [3] の略解：広義積分の収束発散

1

問題 a, b を実数とする。広義積分 $I := \displaystyle\int_1^\infty \frac{(\log x)^b}{x^a} dx$ の収束発散を判定せよ。

答え (1) I が収束するための必要十分条件は、$a > 1$ かつ $b > -1$ である。

定義 積分 I は $x = 1+0$ と $x = +\infty$ の 2 箇所で広義積分になる。そこで、区間を 2 つに分けて、

$$I_1 := \int_1^e \frac{(\log x)^b}{x^a} dx, \quad I_2 := \int_e^\infty \frac{(\log x)^b}{x^a} dx$$

と置く。この時、より詳細に次が成り立つ。

答え (2) I_1 が収束するための必要十分条件は $b > -1$ である。

(3) I_2 が収束するための必要十分条件は $a > 1$ または「$a = 1$ かつ $b < -1$」である。

後の節で述べるように、答え (1) を得るためには必ずしも (2)(3) を得る必要はない（迂回路がある）のだが、しかし、演習（練習）としては (2)(3) ができた方が良いので、(2)(3) の証明をまず与えることにしよう。

2 $x = 1 + 0$ での広義積分の収束条件

(2) の証明：$I_1 = \displaystyle\int_1^e x^{-a}(\log x)^b dx$ について。

$x \in [1, e]$ の範囲で、x^{-a} は単調なので、$\min(1, e^{-a}) \leq x^{-a} \leq \max(1, e^a)$ となる、つまり、上からも下からも有界である。これより、

$$\min(1, e^{-a}) \int_1^e (\log x)^b dx \leq I_1 \leq \max(1, e^{-a}) \int_1^e (\log x)^b dx$$

となるので、I_1 の収束発散は $I_3 := \displaystyle\int_1^e (\log x)^b dx$ の収束発散と同値[*1]である。以下、I_3 の収束発散を考える。

$b \geq 0$ ならば有界閉区間上の連続関数の積分なので I_3 は収束する。$b < 0$ であれば、$x \in [1, e]$ の範囲で、$\frac{x-1}{e-1} \leq \log x \leq x - 1$ ゆえ

$$\int_1^e (x-1)^b dx \leq I_3 \leq \int_1^e \left(\frac{x-1}{e-1}\right)^b dx$$

が成り立つ。したがって、I_3 の収束発散は $I_4 := \displaystyle\int_1^e (x-1)^b dx$ の収束発散と一致する。I_4 が収束する必要十分条件は $b > -1$ である。

[*1] この段階で答えが a に依存しないことがわかる。

3　$x=+\infty$ での広義積分の収束条件

(3) の証明：

$x=e^t$ と変数変換する。$dx=e^t dt$ などを用いると $I_2=\displaystyle\int_1^\infty t^b e^{(1-a)t}dt$ となる。

(3-1) $a=1$ の場合の証明：

$a=1$ の場合がやさしいので、まずその場合を処理する。この時、$I_2=\displaystyle\int_1^\infty t^b dt$ なので、収束するための必要十分条件は $b<-1$ である。

(3-2) $a>1$ の場合に I_2 が収束すること：$f(t):=t^b e^{(1-a)t/2}$ と置く。「$f(t)$ が $t\in[1,\infty]$ で上に有界である」ことを示せば、

$$I_2=\int_1^\infty f(t)e^{(1-a)t/2}dt \le M\int_1^\infty e^{(1-a)t/2}=\left[\frac{2M}{1-a}e^{(1-a)t/2}\right]_1^\infty=\frac{2M}{a-1}e^{(1-a)/2}$$

によって I_2 も収束する。

(3-3) $a<1$ の場合に I_2 が発散すること：$g(t):=t^{-b}e^{-(1-a)t}$ と置く。「$g(t)$ が $t\in[1,\infty]$ で上に有界である」ことを示せば、つまり、$g(t)\le M$ であれば、$t^b e^{(1-a)t}\ge 1/M$ なので

$$I_2\ge\frac{1}{M}\int_1^\infty dt=\infty$$

となるので I_2 も発散する。

(3-4) 以上の考察によって、次の事実を証明すれば良い。

「$s>0$ と実数 b を固定した時に、$f(t)=t^b e^{-st}$ は $t\in[1,\infty)$ で上に有界。」

その事実の証明は、微分して増減表を書けば良い。

あるいは、補題：

$[1,\infty)$ 上の連続関数 $f(t)$ が $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}f(t)=0$ を満たせば、$f(t)$ は $[1,\infty)$ で有界である。

を用いても良い。

4

短めの解答を書くのであれば、I_1, I_2 に分けず、次のようにすることもできる。元の I で $x=e^t$ の変数変換を行うと、

$$I=\int_0^\infty t^b e^{(1-a)t}dt$$

となる。右辺を I_6 と書く。$a>1$ ならば $u=(a-1)t$ と変数変換すると、

$$I_6=(a-1)^{-b-1}\int_0^\infty u^b e^{-u}du=(a-1)^{-b-1}\Gamma(b+1)$$

となる。ガンマ関数の収束発散は８回目の演習で扱った。(結局はここをちゃんと議論する必要がある。ごめんなさい、時間がなくて書けていません。この部分は 12/1 の演習できちんと解説したのでそれを思い出してください。)

$a=1$ の時は

$$I_6 = \int_0^\infty t^b dt$$

であり、これもどんな b に対しても発散する。($\int_1^\infty t^b dt$ の収束条件 $b<-1$ と $\int_0^1 t^b dt$ の収束条件 $b>-1$ の両方を満たすような b が存在しないので。)

$a<1$ ならば $u=(1-a)t$ と変数変換すると、

$$I_6 = (1-a)^{-b-1}\int_0^\infty u^b e^u du$$

となる。$u \in [0,\infty)$ で $e^u \geq 1$ であるのでこの積分は

$$\int_0^\infty u^b e^u du \geq \int_0^\infty u^b du$$

となり、右辺は $a=1$ の時の I_6 なので発散する。

5

もっとラフに書くとしたら、

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{(\log x)^b}{x^a(x-1)^b} = 1$$

なので、I_1 の収束発散は I_4 の収束発散と同値である。したがって、収束条件は $b>-1$。したがって、以下、$b>-1$ の時だけを考えれば良い。

$a=1$ の時は、被積分関数 $(\log x)^b x^{-1}$ には不定積分 $\frac{1}{b+1}(\log x)^{b+1}$ が存在する。この関数の $x\to\infty$ での値が無限大に発散するので、積分 I_2 は発散している。

$a<1$ の時は $x \geq 1$ で $x^a \leq x$ であるから、$a<1$ の時の I_2 は $a=1$ の時の I_2 よりも大きい。したがって発散している。

あとは、$a>1$ の時に、I_2 が収束することの証明が残っている。ここは４節の技法でガンマ関数に帰着するかな。