

2021年12月1日配布

数学演習 IIA-8 回目：表現行列、固有値

- 1 [表現行列と基底変換] 定数 $h > 0$ を固定する。 V を 3 次以下の多項式のなす線形空間、 V' を 2 次以下の多項式のなす線型空間とする。線型写像 $T : V \rightarrow V'$ を

$$(Tf)(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

と定義する。

- (1) $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\} = \{1, x, x^2, x^3\}$ を V の基底、 $\{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3\} = \{1, x, x^2\}$ を V' の基底とする。基底 $\{\mathbf{u}_j\}$ と基底 $\{\mathbf{u}'_i\}$ に関する T の表現行列 A を求めよ。
- (2) 基底 $\{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3\}$ から基底 $\{\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3\} = \{1, x, (x-h)x\}$ を作る変換行列 Q を求めよ。
- (3) 基底 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ から基底 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\} = \{1, x, (x-h)x, (x-2h)(x-h)x\}$ を作る変換行列 P を求めよ。
- (4) 基底 $\{\mathbf{v}_j\}$ と基底 $\{\mathbf{v}'_i\}$ に関する T の表現行列 B を求めよ。

- 2 [固有値と固有空間の計算] 次の行列の固有値と対応する固有空間を求めよ。

$$(1) A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ k-1 & k & k-1 \\ k-1 & k & k+1 \end{pmatrix}$$

- 3 [階数の性質] 次を示せ。

- (1) 線型写像 $f : V \rightarrow V', g : V' \rightarrow V''$ に対して $\text{rank}(g \circ f) \leq \text{rank}(g)$ を示せ。
- (2) 線型写像 $h : W \rightarrow W'$ に対して、 $\dim \text{Im} h \leq \dim W$ を示せ。
- (3) 線型写像 $f : V \rightarrow V', g : V' \rightarrow V''$ に対して $\text{rank}(g \circ f) \leq \text{rank}(f)$ を示せ。

● ヒント

- 1 (1)p188 練習問題 6.13, p181 例 6.16 の類題。(4) p184, 定理 6.8 の具体計算。
- 2 §6.4 の計算問題。練習問題 6.18, 6.20 の類題。
- 3 p189 練習問題 6.17。p185 定理 6.9 などの応用。(1)(3) では $\text{rank}(f) = \dim \text{Im} f$ を用いて良い。(2) では p169 系 6.2 の次元定理を用いて良い。