線形代数・期末試験・問題用紙

2021 August 6(金曜２限)

解答用紙の使い方

- 解答用紙は A4 を縦に用いる。各用紙の表(おもて)の最も上の部分に氏名と学籍番号を書くこと。
- 表(おもて)面で足りない場合は、まず裏面を使用すること。
さらにそれでも足りない場合に 2 枚目以降を使うこと。
- 解答用紙を 2 枚使った場合は、解答用紙の表(おもて)面の右上にそれぞれ 1/2, 2/2 と記すこと。
3 枚使ったならば 1/3, 2/3, 3/3。

出題の説明：

- 問題 $\boxed{1}$ から $\boxed{6}$ の 6 題全てに解答せよ。
- 配点：100 点満点。$30 + (5 + 5 + 10 + 10) + 10 + 10 + 10 + 5 \times 2$. 問題$\boxed{7}$は 0 点、$\boxed{8}$は 1 点。
- 時間が余ったら問題 $\boxed{8}$ に解答しても良い。
- 授業などの感想などを $\boxed{7}$ に書いても良い。
なお、試験前後に moodle の授業アンケート (匿名, オンライン) にも答えてください。

内容に関するメッセージ：

- 一般に答えだけでなく、途中の計算・論証・説明・理由などを書くこと。
- $\boxed{2}$ $\det C$。必要はないのだが、$a_1a_2a_3 \neq 0$ を仮定して解いても OK とする。
- $\boxed{3}$ 条件 (i)(ii)(iii) のうち、証明に使わないものがあっても良い。
- $\boxed{4}$ y 座標や z 座標が等しいことの証明はしなくて良い。
- $\boxed{5}$ 他の 7 つの性質は書かなくて良いし示さなくて良い。
- $\boxed{6}$ はい・いいえ、yes/no、真偽など、分かればどのように答えても良い。
- $\boxed{8}$ 念のため、X の階数は $2n$ ではなくて n です。

禁止事項：

- 不正行為は禁止する。また、不正行為と紛らわしい行為も紛らわしいのでしないでください。
例：電話を机の上に置いたりポケットに入れたりしてはいけません。
例：机の引き出しに物を入れてはいけません。
例：教科書やノートや紙類や電話などはむき出しに置かず、鞄や袋などに入れてください。
- 鞄などを持っていない場合は、それらは教室左前方隅に置いてください。
- 鞄などは隣の椅子または足元または教室左前方隅に置いてください。
- 飲食物の持ち込みと利用を禁じます。

$\boxed{1}$ k を実数とする。未知数 x, y, z に関する連立１次方程式

$$\begin{cases} kx + 4y - 2z &= 0 \\ -x - 2y + \ \ z &= 0 \\ y + kz &= 1 \end{cases}$$

を考える。k によって適切に場合を分けて、<u>それぞれの場合に</u>

(a) 拡大係数行列 $\tilde{A}$ を簡約化した行列を求めよ。

(b) 係数行列の階数と拡大係数行列の階数を求めよ。

(c) 連立方程式の解を求めよ。

$\boxed{2}$ 次の行列 A, B, C, D の行列式を求めよ。なお $\det(A)$ は因数分解して答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}.$$

$\boxed{3}$ $\mathbb{R}^6$ の中の 5 本のベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5$ が次の 3 つの条件 (i)(ii)(iii) を全て満たすとする。

(i) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ は線形独立。

(ii) $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5$ は線形独立。

(iii) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_5$ は線形従属。

このとき、次の 3 つの主張 (a)(b)(c) のうち正しいものを一つ選び、それを証明せよ。

(a) $\mathbf{v}_5$ は, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2,$ $\mathbf{v}_3$ の線形結合。

(b) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_5$ は線形独立。

(c) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5$ は線形従属。

$\boxed{7}$ 授業や演習の感想などが、もしあれば書いてください。講義と関係ない感想でも良いです。
なお、moodle での授業アンケート (無記名、記号選択式) には答えてください。お願いします。

$\boxed{8}$ 行列 X を $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ とブロック分けする。ただし、行列 A, D はどちらも n 次正則行列であり、X の階数が n であるとする。この時、行列 B, C も共に正則行列であることを示せ。

教科書の記号

- $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ の内積、外積をそれぞれ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ と書く。

$\boxed{4}$ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ とする。次の (1) から (6) の式のうち正しいものを一つ選べ。

(1) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b}$.

(2) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b}$.

(3) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$.

(4) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b}$.

(5) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b}$.

(6) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$.

また、選んだその式の x 座標 (つまり第１成分) の等式を $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ に対して証明せよ。

$\boxed{5}$ $K = \mathbb{R}$ とする。X を空でない集合とする。X から $\mathbb{R}$ への写像全体のなす集合を V とする。加法 $p : V \times V \to V$ とスカラー倍 $m : K \times V \to V$ を次のように定める。

$$p(f,g)(x) = f(x) + g(x), \qquad m(k,f)(x) = kf(x) \qquad (f, g \in V,\ k \in K,\ x \in X).$$

この時、集合 V は演算 p, m によって線型空間になることを示したい。８つの性質のうち、

性質 (II-1): $f, g \in V$ と $k \in K$ に対して、..........................

の点線部分を補って文章を完結し、それを証明せよ。

$\boxed{6}$ 次の集合は自然な加法とスカラー倍で線型空間になるか？
W_1, W_2 のそれぞれについて、なる・ならない を答えて、その説明を与えよ。

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + 2xy - y^2 = 0 \right\}, \qquad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + y = 0,\ x \geq 0 \right\}.$$

問題は以上

$\boxed{1}$ 教科書 p55, 練習問題 2.9 から。enshu6[1] の類題。

出題の狙い：簡約化、行基本変形、主成分、階数、階数と連立一次方程式の解の関係。不定 (i)・不能 (ii-1)・解が一意に存在 (ii-2) の場合のそれぞれの処理、パラメータを含んだ行列の演算。

解答例：拡大係数行列は $\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 4 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{array}\right)$. この $\tilde{A}$ を行基本変形で簡約化していく。

(方法は色々ある。) １行目に２行目の２倍を足す、２行目を -1 倍する、２行目から３行目の２倍を引く、という３つの操作をすると、$\tilde{A} \to \left(\begin{array}{ccc|c} k-2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} k-2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{array}\right) \to$

$\left(\begin{array}{ccc|c} k-2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1-2k & -2 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{array}\right)$. ここで $k=2$ と $k \neq 2$ で場合を分ける。

(i) $k=2$ の時。

(a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ と簡約化できる。ここでは、第１行と第２行を交換しそのあと第２行と第３行を交換する、という操作をした。最後の行列が (a) の答えである。

(b) 拡大係数行列と係数行列の階数は共に 2。

(c) 簡約化された拡大係数行列に対応する連立一次方程式は、

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-5z & = & -2 \\ y+2z & = & 1 \end{array}\right.$$

であるから、これを解いて、

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 5z-2 \\ y & = & -2z+1 \end{array}\right.$$

となる。つまり、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5z-2 \\ -2z+1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(ii) $k \neq 2$ の時。この時、(i) の直前の行列の第１行を $k-2 \neq 0$ で割り算することができて、そうすると、$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1-2k & -2 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{array}\right)$ となる。さらに、２行目から１行目を引き、２

行目と3行目を入れ替えると、$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-2k & -2 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & -1-2k & -2 \end{array}\right)$.

ここで $-1-2k$ が 0 であるかないかで、さらに場合分けする。

(ii-1) $k=-1/2$ の時。

(a) この時、$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ と簡約化できる。(a) の答え。ここで、第3行を -2 で割り算し、第2行から第3行を引いた。

(b) 係数行列の階数は2。拡大係数行列の階数は3.

(c) 解なし。(b) から結論づけても良いし、(a) 答えの第3行に $0=1$ という方程式があるので、それを満たす x,y,z が存在しないから、と言っても良い。

(ii-2) $k \neq -1/2$ の時。(つまり $k \neq -1/2, 2$ の時。)

(a) (ii-1) の直前の行列の第3行を $-1-2k \neq 0$ で割り算することができて、$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{1+2k} \end{array}\right)$ となる。第2行から第3行の k 倍を引くと、$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{1+2k} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{1+2k} \end{array}\right)$. これが (a) の答え。

(b) 階数はどちらも3である。

(c) 解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{1+2k} \\ \frac{2}{1+2k} \end{pmatrix} = \frac{1}{1+2k}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

以上で解答は終わりである。

- 方程式の解が得られたら検算することができる場合がある。
  - (i) 連立方程式に直接代入すれば良い。あるいは、$x=5, y=-2, z=1, k=2$ を代入すると、連立方程式の左辺は3式とも0になる。$x=-2, y=1, z=0, k=2$ を代入すると連立方程式の左辺は、第1式$=0$, 第2式$=0$, 第3式$=1$となるので、検算ができた。
  - (ii-2) 連立方程式に直接代入すれば良い。あるいは、$x=0, y=1, z=2$ を連立方程式の左辺に代入すると、それぞれ、第1式$=0$, 第2式$=2$, 第3式$=1+2k$ となるので、検算ができた。
  - (ii-1) 解がないので通常は検算が難しい。第2式に第3式の10倍を足して第1式の2倍を引くと、左辺は0になり、右辺は10になるので、$0=10$ という式が得られて解がないことがわかるものの、その係数 $(-2,1,10)$ を思いつくことは現実的ではない。

$\boxed{2}$ 練習問題 3.4(1)(p79) や enshu8 の類題。
出題の狙い：行列式の様々な計算方法、性質の活用。

答え：途中計算は省略しています。ごめんなさい。

(a) $\det A = (y-x)(z-x)(z-y)(x+y+z)$.
ファンデルモンド型そのものではないが類似の性質を持つ行列。

(b) $\det B = -1$.
「襷掛けを 4 次の行列にも適用して $= 0$」という誤答をしていないことを確認する問題です。１行目と４行目を入れ替えると単位行列になります。

(c) $\det C = -a_1a_2b_3c_3 - a_1a_3b_2c_2 - a_2a_3b_1c_1$. 展開定理などから。なお、enshu10[2] の計算をこの場合に行なって、$\det C = -a_1a_2a_3\left(\frac{c_1b_1}{a_1} + \frac{c_2b_2}{a_2} + \frac{c_3b_3}{a_3}\right)$ という流れで示しても良い。

(d) $\det D = x^6 - 2$. 例題 3.8(p87) の関連問題でもあります。

$\boxed{3}$ enshu14[1] の類題。

出題の狙い：４章第１節の線形結合・線形独立・線形従属の具体的な利用。

(a) のみが正しい。なお、(b),(c) には下記のような反例があるので正しくない。

(a) の証明：条件 (iii) より、$(0,0,0) \neq \exists(x_1,x_3,x_5) \in \mathbb{R}^3$ such that $x_1\mathbf{v}_1 + x_3\mathbf{v}_3 + x_5\mathbf{v}_5 = \mathbf{0}$.
ここでもし $x_5 = 0$ だったとすると、$x_1\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 + 0\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$ となる。条件 (i) より、$x_1 = x_3 = 0$ である。これは、$(0,0,0) \neq (x_1,x_3,x_5)$ に矛盾する。したがって $x_5 \neq 0$ が証明できた。ゆえに、

$$\mathbf{v}_5 = -\frac{x_1}{x_5}\mathbf{v}_1 - \frac{x_3}{x_5}\mathbf{v}_3 = -\frac{x_1}{x_5}\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 - \frac{x_3}{x_5}\mathbf{v}_3$$

と書き直すことができる。したがって (a) が成り立つことが示せた。証明終わり。

(b) の反例。$\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{v}_4 = \mathbf{e}_4$, $\mathbf{v}_5 = \mathbf{e}_1$.

(c) の反例。$\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{v}_4 = \mathbf{e}_4$, $\mathbf{v}_5 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$.
ここで $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_6$ は $\mathbb{R}^6$ の標準基底 p100, 式 (4.1) を意味しています。

$\boxed{4}$ 練習問題 4.3(2)(p114) の公式の証明。

出題の狙い：外積の定義や計算。

答えは (6) である。

考察：(1)(2)(3) は左辺がスカラー、右辺がベクトルなので式としてナンセンスである。また、(4)(5)(6) の左辺は $\mathbf{b}$ と $\mathbf{c}$ の入れ替えでマイナス１倍になるが、(4) は入れ替えで対称的、(5)(6) は入れ替えた時にマイナス１倍になるので、(4) は正しくなく、(5)(6) のいずれかが正しい答えであることがわかる。あとは計算することになります。

証明：$\mathbf{d} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ とする。$\mathbf{a} \times \mathbf{d}$ の x 座標は

$$a_2 d_3 - a_3 d_2 = a_2(b_1 c_2 - b_2 c_1) - a_3(b_3 c_1 - b_1 c_3).$$

一方、

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})b_1 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})c_1 &= (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3)b_1 - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)c_1 \\ &= (a_2 c_2 + a_3 c_3)b_1 - (a_2 b_2 + a_3 b_3)c_1.\end{aligned}$$

この２つは一致している。

$\boxed{5}$ enshu12[1] の一部。５章第１節、例 5.2(p116), 定義 5.1(p118), 参考 (p123)。

出題の狙い：線形空間の定義の条件の確認。関数のなす線形空間における条件の理解の確認。

$$\text{性質 (II-1): } f, g \in V \text{ と } k \in K \text{ に対して、} k(f+g) = kf + kg$$

を示す。$\forall x \in X$ に対して、

$$\begin{aligned}(k(f+g))(x) &= k\{(f+g)(x)\} \\ &= k\{f(x) + g(x)\} \\ &= kf(x) + kg(x) \\ &= (kf)(x) + (kg)(x) \\ &= (kf + kg)(x).\end{aligned}$$

ここで、１つ目と４つ目の等号では $m(k, f)$ の定義を使い、２つ目と５つ目の等号では $p(f, g)$ の定義を使い、３つ目の等号では実数に対する分配法則を用いた。

$\boxed{6}$ enshu12[2]。5.3.2 節とその例、定義 5.9(p142)。

出題の狙い：部分空間の条件（和やスカラー倍で閉じている, p119）による線形空間の理解。

答え：W_1 も W_2 も線形空間ではない。具体的には、W_1 は和に関して閉じていない。W_2 はスカラー倍に関して閉じていない。なお、W_1 はスカラー倍に関して閉じている。W_2 は和に関して閉じている。

W_1 の証明。$y=1$ とした 2 次方程式 $x^2+2x-1=0$ を解くと $x=-1\pm\sqrt{2}$ となる。したがって、$\mathbf{v}=\begin{pmatrix}-1+\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{w}=\begin{pmatrix}-1-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$ とすると、$\mathbf{v},\mathbf{w}\in W_1$ である。ところが、$\mathbf{v}+\mathbf{w}=\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ だが、$(-2)^2+2(-2)\times 2-2^2=-8\neq 0$ なので、$\mathbf{v}+\mathbf{w}\notin W_1$ である。したがって、W_1 は和に関して閉じていない。

W_2 の証明。$\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\in W_2$ なのだが、それの -1 倍 $-\mathbf{v}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\notin W_2$ なので、W_2 はスカラー倍に関して閉じていない。

補足：「$x^2+2xy-y^2=0, u^2+2uv-v^2=0$ の時に、
$\underline{(x+u)^2+2(x+u)(y+v)-(y+v)^2 \text{ は } 0 \text{ ではない}}$ので、...」という議論は、結果としては正しいものの、答案として説明不足である。なぜなら、「$x^2+2xy+\frac{1}{2}y^2=0, u^2+2uv+\frac{1}{2}v^2=0$ の時に、$(x+u)^2+2(x+u)(y+v)+\frac{1}{2}(y+v)^2$ は 0 ではない」という主張は正しくない (enshu12[2] の W_3 と同じようにその場合は $\{\mathbf{0}\}$ だけからなるので)。ということは、2 次式の係数が具体的にどうなっているかを用いた議論をしない限り、下線部の内容を証明することはできないはずである。逆にそのことに気がつくと、判別式が正であるか (今の問題$\boxed{7}$(1) や enshu12[2]W_1 の状況)、負であるか (enshu12[2]W_3 の状況) で、線形空間にならないかなるかが分かれることに気がつく。

$\boxed{7}$ 答案に感想を書いたかどうかにかかわらず、moodle の授業アンケートには答えてください。お願いします。

$\boxed{8}$ 例題 2.5(1)(p44), 定理 3.11(p76), enshu10[2] の類題。

出題の狙い：発展問題です。今までのいくつかの技術を合わせ技で使います。

$$\begin{pmatrix} E & O \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} E & -A^{-1}B \\ O & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

ここで $\begin{pmatrix} E & O \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix}$ や $\begin{pmatrix} E & -A^{-1}B \\ O & E \end{pmatrix}$ は正則行列なので、

$$\begin{aligned} n &= \mathrm{rank}\ X \\ &= \mathrm{rank} \begin{pmatrix} E & O \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} E & -A^{-1}B \\ O & E \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{rank} \begin{pmatrix} A & O \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{rank}\ A + \mathrm{rank}(D-CA^{-1}B) \\ &= n + \mathrm{rank}(D-CA^{-1}B). \end{aligned}$$

したがって、$\mathrm{rank}(D-CA^{-1}B)=0$. ゆえに $D = CA^{-1}B$. 例題 2.3(p38)「積が正則行列ならば、それぞれも正則行列」より C, B は正則である。