線形代数・中間試験・問題用紙

2021 December 17(金曜２限)

解答用紙の使い方

- 解答用紙は A4 を縦に用いる。各用紙の表の最も上の部分に氏名と学籍番号を書くこと。
- 表面で足りない場合は、まず裏面を使用すること。
  さらにそれでも足りない場合に 2 枚目以降を使うこと。
- 解答用紙を 2 枚使った場合は、解答用紙の表面の右上にそれぞれ 1/2, 2/2 と記すこと。
  3 枚使ったならば 1/3, 2/3, 3/3。

出題の説明：

- 問題 $\boxed{1}$ から $\boxed{4}$ の 4 題全てに解答せよ。
- 配点：100 点満点。$(10+10+5)+(4+16)+(2+10+5+10+3)+(10+15)$. 問題$\boxed{5}$は 0 点。

内容に関するメッセージ：

- 一般に答えだけでなく、途中の計算・論証・説明・理由などを書くこと。
- $\boxed{2}$ (a) だけは答えのみで良い。また、答えの書き方は外延的記法でも内包的記法でもどちらでも良い。なお、どのように記述するかで (b) の答えの書きやすさは変わってくる。
- $\boxed{1}$ V が線型空間であることは証明しなくて良い。
- $\boxed{2}$ f, g, h が線型写像であることは証明しなくて良い。
- $\boxed{3}$ T が線型写像であることは証明しなくて良い。
- $\boxed{1}$(b) 基底は一組求めれば良い。
- 教科書の記号：Ker は核、Im は像を表す。核や像が部分空間であることは証明なしに用いて良い。

禁止事項：

- 不正行為は禁止する。また、不正行為と紛らわしい行為も紛らわしいのでしないでください。
  例：電話を机の上に置いたりポケットに入れたりしてはいけません。
  例：机の引き出しに物を入れてはいけません。
  例：教科書やノートや紙類や電話などはむき出しに置かず、鞄や袋などに入れてください。
- 鞄などを持っていない場合は、それらは教室左前方の隅に置いてください。
- 鞄などは隣の椅子または足元または教室左前方の隅に置いてください。

$\boxed{1}$ V を3次正方行列全体のなす線型空間とする。$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。写像 $T : V \to V$ を $T(X) = AX - XA$ と定義する。

(a) T は線型写像であることを示せ。

(b) $\mathrm{Ker}\, T$ の基底を求めよ。

(c) $\mathrm{Im}\, T$ の次元を求めよ。

$\boxed{2}$ $V = \mathbb{R}^3$ とする。線型写像 $f : V \to \mathbb{R}$, $g : V \to \mathbb{R}$, $h : V \to V$ を

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = x + y + z, \qquad g(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = z, \qquad h(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2x + 3y \\ y - z \end{pmatrix}$$

と定義する。$W_1 = \mathrm{Ker}\, f$, $W_2 = \mathrm{Ker}\, g$, $W_3 = \mathrm{Im}\, h$ と定める。

(a) $W_1, W_2, W_1 \cap W_2, W_3$ を求めよ。

(b) $(W_1 \cap W_2) \oplus W_3 = \mathbb{R}^3$ であることを示せ。

$\boxed{3}$ V を3次以下の多項式全体のなす線形空間、V' を2次以下の多項式全体のなす線型空間とする。$T : V \to V'$ を $f(x) \mapsto f(1 - x) + f(x)$ と定める[1]。

(a) $f = x^3$ の時、Tf を求めよ。

(b) $\{1, x, x^2, x^3\}$ を V の基底、$\{1, x, x^2\}$ を V' の基底とした時、線型写像 T の表現行列 A を求めよ。

(c) V' の基底 $\{1, x, x^2\}$ から基底 $\{1, x, x^2 - x\}$ を作る変換行列 Q を求めよ。

(d) 線型写像 T の、基底 $\{1, x, x^2, x^3\}$ と $\{1, x, x^2 - x\}$ に関する表現行列 B を求めよ。

(e) 線型写像 T の階数 $\mathrm{rank}\, T$ を求めよ。

$\boxed{4}$ $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -1 \\ -7 & -6 & 1 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ とする。

(a) 固有多項式と固有値を求めよ。

(b) 固有値ごとに固有空間 $W(\lambda)$ を求めよ。

$\boxed{5}$ 授業や演習の感想などが、もしあれば書いてください。講義と関係ない感想でも良いです。

問題は以上

[1]例えば、$f = 3x^2 + 4x + 5$ の時は、$Tf = \{3(1 - x)^2 + 4(1 - x) + 5\} + (3x^2 + 4x + 5) = 6x^2 - 6x + 17$ である。

中間試験 略解

2021 December 17 (金曜２限)

途中計算は省略しています。ごめんなさい。

$\boxed{1}$ 狙い：線型写像、核、基底、像、次元定理。設定は p166 練習問題 6.2 や数学演習第６回$\boxed{3}$。

(a) $X, Y \in V$, $k \in \mathbb{R}$ に対して、(i) $T(X+Y) = T(X) + T(Y)$, (ii) $T(kX) = kT(X)$ を示す。

(i) $T(X+Y) = A(X+Y) - (X+Y)A = AX - XA + AY - YA = T(X) + T(Y)$.

(ii) $T(kX) = A(kX) - (kX)A = k(AX - XA) = kT(X)$.

(b) $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ に対して、

$$T(X) = AX - XA = \begin{pmatrix} d-2c & e-a & f-b \\ g-2f & h-d & i-e \\ 2a-2i & 2b-g & 2c-h \end{pmatrix}.$$

したがって $X \in \mathrm{Ker}\, T$ となるのは、

$$a = e = i,\ 2b = 2f = g,\ 2c = d = h$$

の時となる。この時、$X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2c & a & b \\ 2b & 2c & a \end{pmatrix} = aE + bA + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. 従って、核の一組の基底は、$\{E, A, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\}$. なお最後の行列は A^2 とも書ける。つまり、$\{E, A, A^2\}$ が基底、と答えても良い。基底の取り方は無数にあるので正解も無数にある。

(c) 次元定理より $\dim \mathrm{Ker}\, T = \dim V - \dim \mathrm{Im}\, T = 9 - 3 = 6$。

$\boxed{4}$ 狙い：固有値、固有ベクトル、固有空間。（行列式や連立一次方程式を用いて。）

素材は p199, 練習問題 6.18(2) の類題。

$$W(2) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad W(1) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W(-1) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

なお、$A\mathbf{x}$ を計算することで簡単に検算できる問題です。

$\boxed{2}$ 狙い：線型空間の共通部分、和空間、直和、線型写像の核、像。設定は p155, 例題 5.10。

(a) $W_1, W_2, W_1 \cap W_2$ は教科書通り。$W_1 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$,

$W_2 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, $W_1 \cap W_2 = \{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\}$, $W_3 = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbb{R}\}$.

(b) (i) $(W_1 \cap W_2) \cap W_3 = \{\mathbf{0}\}$ と (ii) $(W_1 \cap W_2) + W_3 = \mathbb{R}^3$ を示す。

(i) $\begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \in W_3$ だとすると、$x = 0$。

(ii) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x+y \\ z \end{pmatrix}$ なので $\mathbb{R}^3$ の任意の元は $W_1 \cap W_2$ の元と W_3 の元の和に書き表せる。

$\boxed{3}$ 狙い：表現行列、基底変換行列、基底の取り替え、線型写像の階数。
設定は p199, 練習問題 6.21。数学演習第 8 回$\boxed{1}$の類題。

(a) $Tf = (1-x)^3 + x^3 = 3x^2 - 3x + 1$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(c) $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) $B = Q^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. なお、$A, Q$ を使わずに直接求めるのも良いでしょう。

(e) $\operatorname{rank} T = \operatorname{rank} B = 2$.