線形代数・期末試験・問題用紙

2023 February 10(金曜２限)

解答用紙の使い方

- 解答用紙は A4 を縦に用いる。各用紙の表(おもて)の最も上の部分に氏名と学籍番号を書くこと。
- 表(おもて)面で足りない場合は、まず裏面を使用すること。
  さらにそれでも足りない場合に 2 枚目以降を使うこと。
- 解答用紙を 2 枚使った場合は、解答用紙の表(おもて)面の右上にそれぞれ 1/2, 2/2 と記すこと。
  3 枚使ったならば 1/3, 2/3, 3/3。

出題の説明：

- 問題 $\boxed{1}$ から $\boxed{8}$ の 8 題全てに解答せよ。
- どの順に解答してもよい。どの問題を解答したかを明記して下さい。
- 配点：$10+10+10+(10+10)+(2+3+10)+(10+2)+15+(3+15)$。なお、問題 $\boxed{10}$ は 0 点。
- 授業などの感想などを $\boxed{10}$ に書いても良い。
  なお、試験前後に moodle の授業アンケート (匿名, オンライン) にも答えてください。

内容に関するメッセージ：

- 答えだけでなく、途中の計算・論証・説明・理由などを書くこと。
  ただし、問題 $\boxed{6}$(2) と $\boxed{8}$(1) は答えだけでよい。
- $\boxed{3}$ T が線型写像であることや V から V への写像であることは証明しなくて良い。
- $\boxed{5}$ 固有ベクトルは、各固有値に対して一つずつ求めれば良い。全部求めなくて良い。
- 他の問題の答えを用いるときは問題番号を明記して用いよ。
- $\boxed{8}$ ヒント：${}^t\mathbf{p}A\mathbf{p}$ を 2 通りに計算してみよ。

禁止事項：

- 不正行為は禁止する。また、不正行為と紛らわしい行為も紛らわしいのでしないでください。
  例：電話を机の上に置いたりポケットに入れたりしてはいけません。
  例：机の引き出しに物を入れてはいけません。
  例：教科書やノートや紙類や電話などはむき出しに置かず、鞄や袋などに入れてください。
- 鞄などを持っていない場合は、それらは教室左前方隅に置いてください。
- 鞄などは隣の椅子の上または下、または教室左前方隅に置いてください。
- 食べ物の持ち込みと利用を禁じます。

$\boxed{1}$ ３次正方行列 A で tr $(A) \leqq 1$ となるものの全体 W は (自然な加法とスカラー倍によって) 線形空間になるか？答えだけでなく理由も与えよ。

$\boxed{2}$ $V = \{f \in C^{\infty}(\mathbb{R}) \mid f'' = -f\}$ とする。$f_1(x) = \cos x,\ f_2(x) = \sin x,\ f_3(x) = \cos(x + \frac{\pi}{4})$ とする。$S = \{f_1, f_2, f_3\}$ は V の基底になるか？答えだけでなく理由も与えよ。

$\boxed{3}$ $S = \{1, x, x^2\}$ を基底とする線形空間を V とする。$(Tf)(x) = \dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_1^x f(t)dt$ で定まる線形写像 $T : V \to V$ の、基底 S に関する表現行列を求めよ。

$\boxed{4}$ A を n 次正方行列とする。$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ で定める。Im f を f の像とする。W を固有値 1 に対する固有空間とする。

(1) $W(1) \subset \mathrm{Im}\ f$ であることを示せ。

(2) $A^2 = A$ の時、$\mathrm{Im}\ f \subset W(1)$ であることを示せ。

$\boxed{5}$ $c \neq 0, 1$ とする。$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c-1 & c & c+1 \\ c-1 & c-1 & c-2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

$\boxed{6}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ の

(1) 固有多項式、固有値、各固有値に対する固有空間を求めよ。途中計算も書くこと。

(2) また、$P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を１つ求めよ。答えだけで良い。

$\boxed{7}$ 微分方程式 $y'' = 2y' + 3y$ の解 $y = y(t)$ で、$y(0) = -1, y'(0) = 5$ を満たすものを求めよ。

$\boxed{8}$ A を n 次正方行列とし、$\mathbf{p} \in \mathbb{C}^n$ を列ベクトルとする。$\lambda \in \mathbb{C}$ とする。

(1) $\mathbf{p}$ が、(A の定める線形変換の固有値 λ に属する) <u>固有ベクトル</u>であることの定義を述べよ。答えだけでよい。

(2) A が実対称行列ならば、固有値 λ は実数であることを証明せよ。

問題は以上

$\boxed{10}$ 授業や演習の感想などが、もしあれば書いてください。講義と関係ない感想でも良いです。
なお、moodle での授業アンケート (無記名、記号選択式) には答えてください。お願いします。

期末試験 解答例

2023 February 10(金曜２限)

$\boxed{1}$ 線形空間でない。理由の例。$-E \in W$ だが $-(-E) \notin W$ なので、スカラー倍について閉じていない。別の例。$E_{11}, E_{22} \in W$ だが、$E_{11}+E_{22} \notin W$ なので和について閉じていない。

$\boxed{2}$ 基底ではない。理由：加法定理より $f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}f_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}f_2$ となる。従って、f_1, f_2, f_3 は線形従属である。基底は線型独立なので、S は基底になることはできない。

$\boxed{3}$ $f_1 = 1, f_2 = x, f_3 = x^2$ とする。

$$
\begin{aligned}
(Tf_1)(x) &= \frac{1}{x-1}[t]_1^x = 1 = f_1,\\
(Tf_2)(x) &= \frac{1}{x-1}[\frac{1}{2}t^2]_1^x = \frac{1}{2}(x+1) = \frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2,\\
(Tf_2)(x) &= \frac{1}{x-1}[\frac{1}{3}t^3]_1^x = \frac{1}{3}(x^2+x+1) = \frac{1}{3}f_1 + \frac{1}{3}f_2 + \frac{1}{3}f_3.
\end{aligned}
$$

つまり、

$$
\begin{pmatrix} Tf_1 & Tf_2 & Tf_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}
$$

となる。この行列が表現行列である。

$\boxed{4}$ 用語の確認：$\mathrm{Im}\ f = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$ である。$W(1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{x}\}$ である。

(1) $\mathbf{x} \in W(1)$ とする。$A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ である。つまり、$\mathbf{x} = A\mathbf{x} \in \mathrm{Im}\ f$ である。

(2) $\mathbf{y} \in \mathrm{Im}\ f$ とする。$\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ となるような $\mathbf{x}$ が存在する。
この時、$A\mathbf{y} = A^2\mathbf{x} = A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ である。従って、$\mathbf{y} \in W(1)$.

$\boxed{5}$ 固有多項式 $\Phi_A(\lambda) = (\lambda-1)\{(\lambda-c)(\lambda-c+2)-(c+1)(c-1)\} = (\lambda-1)\{\lambda^2+(2-2c)\lambda-2c+1\} = (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+1-2c)$.

固有値 $\lambda = 1, -1, 2c-1$. なお $c \neq 0, 1$ なので $2c-1 \neq \pm 1$ である。したがって A は異なる３つの固有値を持つ。特に A は対角化可能である。

固有ベクトル：途中の計算はこの略解では省略する。

$$
W(1) = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}), \quad W(-1) = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}), \quad W(2c-1) = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 0 \\ c+1 \\ c-1 \end{pmatrix}),
$$

$\boxed{6}$ (1) 固有多項式 $\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda+1)(\lambda-3)$.

固有値 $\lambda = -1, 3$.

固有空間：途中の計算はこの略解では省略する。

$$
W(-1) = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}), \quad W(3) = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}).
$$

(2) ２つの列ベクトルを並べて、$P = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{array}\right)$. 答え。

なお、次の $\boxed{7}$ で用いるために準備しておくと、$\Lambda = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ である。

$\boxed{7}$ $X := \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ と置く。$\boxed{6}$ の A を用いると、$X' = AX$ となる。
従って、$Y := P^{-1}X$ と置くと $Y' = \Lambda Y$ となる。
また、初期条件から $X(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ であり、$Y(0) = P^{-1}X(0) = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
従って、$Y = \exp(t\Lambda)Y(0) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$, $X = PY = \begin{pmatrix} -2e^{-t} + e^{3t} \\ 2e^{-t} + 3e^{3t} \end{pmatrix}$.

従って $y = -2e^{-t} + e^{3t}$.

$\boxed{8}$ (1) $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ であり、$A\mathbf{p} = \lambda\mathbf{p}$.

(2) 上の (1) の転置を取ると、
${}^t\mathbf{p}\,{}^tA = \lambda{}^t\mathbf{p}$. A は対称行列なので
${}^t\mathbf{p}\,A = \lambda{}^t\mathbf{p}$. さらに両辺の複素共役を取ると、
${}^t\overline{\mathbf{p}}\,\overline{A} = \overline{\lambda}{}^t\overline{\mathbf{p}}$. A は実行列なので、
${}^t\overline{\mathbf{p}}\,A = \overline{\lambda}{}^t\overline{\mathbf{p}}$. これを用いると、${}^t\overline{\mathbf{p}}A\mathbf{p} = \overline{\lambda}{}^t\overline{\mathbf{p}}\mathbf{p}$.

一方で (1) を用いると、${}^t\overline{\mathbf{p}}A\mathbf{p} = {}^t\overline{\mathbf{p}}\lambda\mathbf{p} = \lambda{}^t\overline{\mathbf{p}}\mathbf{p}$.

従って、この２つの式を比べる (引き算する) と、$(\lambda - \overline{\lambda})\,{}^t\overline{\mathbf{p}}\mathbf{p} = 0$ となる。
ところで、${}^t\overline{\mathbf{p}}\mathbf{p} = \sum_{j=1}^{n} \overline{p}_j p_j = \sum_{j=1}^{n} |p_j|^2 > 0$ である (最後の不等式で $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ を用いた)。
従って、この数で割り算することができて、$\lambda - \overline{\lambda} = 0$ であり、$\lambda \in \mathbb{R}$.

$\boxed{10}$ 答案に感想を書いたかどうかにかかわらず、moodle の授業アンケートにも答えてください、お願いします。