線形代数・期末試験・問題用紙

2022 August 5(金曜２限)

解答用紙の使い方

- 解答用紙は A4 を縦に用いる。各用紙の表(おもて)の最も上の部分に氏名と学籍番号を書くこと。
- 表(おもて)面で足りない場合は、まず裏面を使用すること。
  さらにそれでも足りない場合に 2 枚目以降を使うこと。
- 解答用紙を 2 枚使った場合は、解答用紙の表(おもて)面の右上にそれぞれ 1/2, 2/2 と記すこと。
  3 枚使ったならば 1/3, 2/3, 3/3。

出題の説明：

- 問題 $\boxed{1}$ から $\boxed{9}$ の 9 題全てに解答せよ。
- どの順に解答してもよい。どの問題を解答したかを明記して下さい。
- 配点：$10 + 10 + 30 + 5 + (10 + 10 + 10) + (5 + 5 + 5) + 10 + 5 + 10$。なお、問題 $\boxed{10}$ は 0 点。
- 授業などの感想などを $\boxed{10}$ に書いても良い。
  なお、試験前後に moodle の授業アンケート (匿名, オンライン) にも答えてください。

内容に関するメッセージ：

- 答えだけでなく、途中の計算・論証・説明・理由などを書くこと。
  ただし、問題 $\boxed{8}$, $\boxed{9}$ は答えだけでよい。
- $\boxed{9}$ はい・いいえ、yes/no、Y/N、真偽、正誤など、分かればどのように答えても良い。
- $\boxed{7}$ で $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ の場合に値を正しく求めた場合は、半分の点数を与える。

禁止事項：

- 不正行為は禁止する。また、不正行為と紛らわしい行為も紛らわしいのでしないでください。
  例：電話を机の上に置いたりポケットに入れたりしてはいけません。
  例：机の引き出しに物を入れてはいけません。
  例：教科書やノートや紙類や電話などはむき出しに置かず、鞄や袋などに入れてください。
- 鞄などを持っていない場合は、それらは教室左前方隅に置いてください。
- 鞄などは隣の椅子の上または下、または教室左前方隅に置いてください。
- 食べ物の持ち込みと利用を禁じます。

$\boxed{1}$ m 行 n 列の行列 A が、性質「任意の n 行 m 列の行列 B に対して、$\mathrm{tr}(AB) = 0$」を満たす時、A は零行列であることを証明せよ。

$\boxed{2}$ 行列 A, B の階数に関する不等式 $\mathrm{rank}(AB) \leq \mathrm{rank}(A)$ を証明せよ。

$\boxed{3}$ k を実数とする。未知数 x, y, z に関する連立１次方程式

$$\begin{cases} k^2x - \ y + 4z &= 1 \\ \ \ x - 2y + \ z &= k \\ \ \ x - \ y + \ z &= 1 \end{cases}$$

を考える。k の値によって適切に場合を分けて、<u>それぞれの場合に</u>

(a) 拡大係数行列 $\tilde{A}$ を簡約化した行列を求めよ。

(b) 係数行列の階数と拡大係数行列の階数を求めよ。

(c) 連立方程式の解を求めよ。

$\boxed{4}$ 置換 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in S_4$ を互換の積に分解せよ。

$\boxed{5}$ 次の行列 A, B, C の行列式を求めよ。なお $\det(B)$ と $\det(C)$ は因数分解して答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ b+c & c+a & a+b \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} x & x & x & b \\ -c & x & b & c \\ b & x & x & x \\ c & b & x & -c \end{pmatrix}.$$

$\boxed{6}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & i & -i \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -i & i \end{pmatrix}$ とする。４次正方行列 A の (1,1) 成分, (1,2) 成分, (1,3) 成分, (1,4) 成分をそれぞれ、$a_{11} = p, a_{12} = q, a_{13} = r, a_{14} = s$ と書く。

(1) $AC = CA$ の時、A を p, q, r, s で表わせ。

(2) その A に対して、$AB = BD$ となる４次正方行列 D を一つ求めよ。

(3) その A の行列式 $\det(A)$ を求めよ。

なお、$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位である。

$\boxed{7}$ ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ の内積や外積を含んだ式

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 - \mathbf{a} \cdot ((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b})$$

を簡単にせよ。

$\boxed{8}$ 整数を成分とする 5 次正方行列 A で、$\det(xE_5 - A) = x^5 - 4x^4 - 2$ となるものを一つ与えよ。答えだけで良い。

$\boxed{9}$ n 次正方行列 A に対する以下の各条件のうち、「A が正則」という条件と同値なものには○、そうでないものには $\times$ をつけよ。答えだけで良い。

(a) $AX = XA = E$ となるような行列 X が存在する。

(b) $AX = E$ となるような行列 X が存在する。

(c) $AX = E$ となるような行列 X が一意的に存在する。

(d) A は基本行列の積で表せる。

(e) A の主成分の個数が n 個である。

(f) A の主成分のある場所は $(1,1)$ 成分、$(2,2)$ 成分、..., (n,n) 成分の n 箇所である。

(g) A を行基本変形で簡約化した行列は単位行列である。

(h) A の階数は n である。

(i) どの行ベクトルも零ベクトルではない。

(j) $\det(A) \neq 0$.

(k) A の n 本の列ベクトルは一次独立である。

(l) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対する方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ に限られる。

(m) 任意の $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ に対して、方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は解 $\mathbf{x}$ を持つ。

(n) $\mathbf{R}^n$ の任意の元は、A の列ベクトルの線型結合である。

(o) 転置行列 ${}^tA$ が正則である。

(p) A の余因子行列が正則である。

問題は以上

$\boxed{10}$ 授業や演習の感想などが、もしあれば書いてください。講義と関係ない感想でも良いです。
なお、moodle での授業アンケート (無記名、記号選択式) には答えてください。お願いします。

期末試験 解答例ならびに解説や関連事項 　　　　　　　　　　2022 August 5 (金曜２限)

$\boxed{1}$ 例題 1.10(2)(p21)。数学演習第 4 回$\boxed{4}$の解答例または教科書を参照。
トレース、行列の積、行列単位、論証。

$\boxed{2}$ 練習問題 2.8(1)(p46)。数学演習第 8 回$\boxed{2}$(2) の解答例または教科書を参照。
階数、基本変形で不変な性質、何を証明すればよいのかの把握。

$\boxed{3}$ 教科書 p55, 練習問題 2.10。
出題の狙い：簡約化、行基本変形、主成分、階数、階数と連立一次方程式の解の関係。不定 (i)・不能 (ii-1)・解が一意に存在 (ii-2) の場合のそれぞれの処理、パラメータを含んだ行列の演算。

この小問 (a)(b)(c) に合わせた解答は、もしかしたら後で書きます。

$\boxed{4}$ 数学演習第 12 回$\boxed{2}$の類題。
置換や互換の定義や記号、置換の積 (順序を正しく書けるかどうか)。

答えは何通りもあるが、その一つは、(12)(24)(34).

$\boxed{5}$ ３章：行列式のさまざまな計算方法。３次までのたすきがけ、基本変形、展開。解答には求めていないが、因子に現れる式からの目視での検算。

答えは、$\det(A) = -1$. $\det(B) = -a(b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)$. $\det(C) = -(x+b)^2(x-b)^2$.

$\det(A)$: ４次でたすきがけ、という誤った解答をすると 0 になる。

$\det(B)$: まず第１行から a を括り出すと、数学演習第 14 回$\boxed{1}$の A とほとんど同じ行列になる。

$\det(C)$: 練習問題 3.4(2)(p79) や数学演習第 14 回$\boxed{1}$の B の類題。どういう時に１次式の積に分解できるか、簡単な十分条件を見つけると面白い（発展的課題)。

$\boxed{6}$ 可換な行列 (練習問題 1.9(p23), 数学演習第 2 回$\boxed{3}$)、巡回行列と行列式 (例 3.25(p95)), 列をブロックとみなす考え方。

(1) $A = pE + qC + rC^2 + sC^3 = \begin{pmatrix} p & q & r & s \\ s & p & q & r \\ r & s & p & q \\ q & r & s & p \end{pmatrix}.$

(2) $D = \begin{pmatrix} a+b+c+d & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & a-b+c-d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+ib-c-id & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & a-ib-c+d & \end{pmatrix}.$

(3) $\det(A) = \det(D) = (a+b+c+d)(a-b+c-d)(a+ib-c-id)(a-ib-c+d)$. 問題に因数分解した形で答えよ、と書き忘れたので、もしかして、展開して複雑な式を答えとした答案があったら採点が面倒で嫌だなあ、と思っているところ。

$\boxed{7}$ 練習問題 4.3(1) の発展。外積の性質や計算やベクトル３重積の性質の利用。

答え：$\|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2$.

計算：第２項にベクトル３重積の性質 $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{b}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$ を用いると、$\mathbf{a}\cdot(((\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{b}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{b}\times\mathbf{a}) = -((\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = -\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|^2$ となる。ここで二つ目の等号は外積の交代性、三つ目の等号は長さと内積の関係。従って、与えられた式は、$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 + \|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2$.

$\boxed{8}$ 同伴行列の性質。例題 3.8(p87) や数学演習第 14 回$\boxed{3}$。

答えはいくつもある。例えば、$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{9}$ 前期全体の復習。正則な行列、連立１次方程式、階数、主成分、簡約、線型結合、転置、余因子

正しいもの：a,b,c,d,g,h,j,k,l,m,n,o,p.

正しくないもの：e 例えば全ての成分が 1 の行列が反例。f 例えば 問題$\boxed{5}$ の行列 A が反例。i 例えば全ての成分が 1 の行列が反例。

全問正解で 10 点。一つ間違えるごとに 2 点減点。五つ以上間違えたら 0 点になる（マイナスにはしない)。

$\boxed{10}$ 答案に感想を書いたかどうかにかかわらず、moodle の授業アンケートには答えてください。お願いします。