2023/1/18 配布分

数学演習 AII 解答例—11 回目：対角化の応用

$\boxed{1}$ 固有多項式 $\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda-3)(\lambda+2)$。従って、固有値は $3, -2$.

固有空間 $W(3) = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix})$. $W(-2) = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix})$.

$P = \begin{pmatrix}1 & 1\\3 & -2\end{pmatrix}$, $P^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & -1\end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix}3 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}$.

$\boxed{2}$ $A = P\Lambda P^{-1}$ ゆえ、$\exp(tA) = \exp(tP\Lambda P^{-1}) = P\exp(t\Lambda)P^{-1}$. ここで、$\exp(t\Lambda) = \begin{pmatrix}e^{3t} & 0\\0 & e^{-2t}\end{pmatrix}$ と、$\boxed{1}$ の P, P^{-1} を代入すると、答えは $\exp(tA) = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}2e^{3t}+3e^{-2t} & e^{3t}-e^{-2t}\\6e^{3t}-6e^{-2t} & 3e^{3t}+2e^{-2t}\end{pmatrix}$.

なお、以下は余談だが、答えの式で $t=0$ を代入すると単位行列になる。また、答えの式を t で微分すると $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}2\times 3e^{3t}+3\times(-2)e^{-2t} & 3e^{3t}-(-2)e^{-2t}\\6\times 3e^{3t}-6(-2)e^{-2t} & 3\times 3e^{3t}+2(-2)e^{-2t}\end{pmatrix}$ となり、その式で $t=0$ を代入すると A になる。この性質は一般に成り立つので検算に使うことができる。

$\boxed{3}$ $X(t) = \begin{pmatrix}y\\y'\end{pmatrix}$ と定義すると、$X'(t) = AX(t)$ が成り立つ。この時、$X(t) = \exp(tA)X(0)$ である。また、与えられた初期条件は $X(0) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ と表せるので、$\boxed{2}$ を用いると $X(t) = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}4e^{3t}+e^{-2t}\\12e^{3t}-2e^{-2t}\end{pmatrix}$ となるので、第１成分を見て、答えは $y = \dfrac{4e^{3t}+e^{-2t}}{5}$。

なお、第２成分 $y' = \dfrac{12e^{3t}-2e^{-2t}}{5}$ が検算になっている。

$\boxed{4}$ $X_n = \begin{pmatrix}x_n\\x_{n+1}\end{pmatrix}$ と定義すると、$X_{n+1} = AX_n$ が成り立つ。この時、$X_n = A^nX_0$ である。ここで、$A^n = (P\Lambda P^{-1})^n = P\Lambda^nP^{-1}$ であるから、$X_n = P\Lambda^nP^{-1}X_0$ となる。ここまでは一般論なので計算は易しい。以下、具体的な数値を代入してみよう。

与えられた初期条件は $X_0 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ と表せる。$\Lambda^n = \begin{pmatrix}3^n & 0\\0 & (-2)^n\end{pmatrix}$ である。これと $\boxed{1}$ の P, P^{-1} を代入すると、$X_n = \dfrac{4\times 3^n+(-2)^n}{5}$.