2022/10/5 問題配布の分

数学演習 AII 解答例—1 回目：前期の期末試験の復習

$\boxed{1}$ (1) 線型結合の復習。$A\mathbf{b}_4$ の成分を具体的に計算して、それを 1 次結合に書いていく。途中の計算は省略、他のものも合わせて結果を書いておくと、

$$\begin{aligned} A\mathbf{b}_1 &= (p+q+r+s)\mathbf{b}_1, \\ A\mathbf{b}_2 &= (p-q+r-s)\mathbf{b}_2, \\ A\mathbf{b}_3 &= (p+qi-r-is)\mathbf{b}_3, \\ A\mathbf{b}_4 &= (p-qi-r+is)\mathbf{b}_4. \end{aligned}$$

(2) 行列のブロック分けの復習。(1) の結果を行列でまとめ書きする。

$$AB = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_4 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c|c|c} p+q+r+s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p-q+r-s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p+qi-r-is & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p-qi-r+is \end{array}\right) =$$

BD. 最後に現れた対角行列が D.

(3) 特殊な行列式の復習。ファンデルモンド行列式で $x_1, x_2, x_3, x_4 = 1, -1, i, -i$ の時の形をしているので行列式は差積として計算できて、

$$\det B = (-1-1)(i-1)(-i-1)(i+1)(-i+1)(-i-i) \neq 0$$

がわかるので B は正則である。なお、値は $\det B = 16i$ となる。

(4) 行列式の基本性質の復習。行列式の積公式から

$$\det(A)\det(B) = \det(AB) = \det(BD) = \det(B)\det(D)$$

なので、(3) より

$$\det(A) = \det(D) = (p+q+r+s)(p-q+r-s)(p+qi-r-is)(p-qi-r+is)$$

が答え。なお、実数の範囲で因数分解したら

$$\det(A) = (p+q+r+s)(p-q+r-s)((p-r)^2 + (q-s)^2)$$

となる。

$\boxed{2}$ トレースの復習、並びに、「任意の」のような条件の使い方の復習。対称行列と交代行列を集団で扱う考え方は、後期に直交補空間と次元定理を学習した時の例のための予行練習も兼ねている。

(a) $n \geq 2$ の時には正しくない。例えば、任意の交代行列 A と対称行列 B に対して、$\mathrm{tr}(AB) = 0$ なので (練習問題 1.16(4), p24)、零行列でない交代行列 A が反例となる。具体的には $A = E_{12} - E_{21}$ とすると良い。
なお、出題時には見逃していたが $n = 1$ の時には正しい。(1 次の交代行列は零行列に限られることとも関係している。)

(b) 任意の $1 \leq i \leq j \leq n$ に対して、$B = E_{ij} + E_{ji}$ は対称行列である。したがって、$0 = \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(AE_{ij}) + \mathrm{tr}(AE_{ji}) = a_{ji} + a_{ij}$ となる。したがって、$A + {}^tA = O$ となるので、A は交代行列である。