2022/10/5 配布

数学演習 AII—1 回目：前期の期末試験の復習

$\boxed{1}$ $A = \begin{pmatrix} p & q & r & s \\ s & p & q & r \\ r & s & p & q \\ q & r & s & p \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & i & -i \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -i & i \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。なお、$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位である。列ベクトルを用いて $B = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_4 \end{pmatrix}$ と表す。

(1) 列ベクトル $A\mathbf{b}_4$ を $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4$ の線型結合で表せ。

(2) $AB = BD$ となる 4 次正方行列 D を一つ求めよ。

(3) $\det B$ を求めよ。B が正則行列であることを示せ。

(4) 行列式 $\det(A)$ を複素数の範囲で一次式の積に因数分解した形で求めよ。

$\boxed{2}$ n 次正方行列 A が、性質「任意の n 次対称行列 B に対して、$\mathrm{tr}(AB) = 0$」を満たすとする。

(a) A は零行列に限られるか。yes/no を答え、理由または反例を述べよ。

(b) A は交代行列であることを証明せよ。

問題は以上。

ヒント：

$\boxed{1}$ (2) 例えば、BD の第 4 列は $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4$ と d_{ij} を用いてどのように表すことができるかを考えよ。

$\boxed{1}$ (3) は (1)(2) とは関係ない。教科書の 3.5 節の特殊な行列式を見よ。

$\boxed{1}$ (4) は (2)(3) を用いる。

$\boxed{2}$ (a)「$\mathrm{tr}(AB) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}$ である。各 i, j に対して、b_{ji} は任意の値を取ることができるので、この式が 0 になるためには $a_{ij} = 0$ となることが必要である。したがって $A = O$ である。」という証明で正しいかどうかを考えよ。

$\boxed{2}$ (b) 難しいと感じたならば、$n = 2$ の場合に限って解いても良い。

時間が余ったら、教科書の章末問題や、私の演習問題が置いてあるサイトの 2021 年や 2020 年の問題を解いてもいいです。