2022/10/19 問題配布

数学演習 AII 解答例—3 回目：線形空間、線形独立

$\boxed{1}$ (1) p118, 定義 5.1.

(2) 両辺に $-\boldsymbol{a}$ を足すと、$(-\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = (-\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c})$.

両辺とも加法の結合法則 (I-2) を用いると、$((-\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{b} = ((-\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c}$.

加法の逆元の定義 (I-4) を用いると、$\boldsymbol{0} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{c}$.

加法の単位元の定義 (I-3) を用いると、$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$. 証明終わり

なお、たいていのやり方では加法の交換法則 (I-1) も必要になるが、それを用いても間違いではない。

$\boxed{2}$ 3つとも no.

- $f = 0$ が W_1, W_3 に入らない。したがって (I-3) が不成立。
- W_1 は和について閉じていない、と証明しても良い。
- なお W_3 は空集合である。空集合は線型空間でない。
- W_3 の右辺の x^3 は、零でない他の関数に取り替えても線型空間ではない。これは教科書の練習問題。
- 単位行列 E は W_2 に入るが、$-E$ が W_2 に入らない。なお、W_2 は和については閉じていて、正のスカラー倍でも閉じているので、負のスカラー倍のみが反例となる。
- なお W_9 も線型空間ではない。参考までに解答を書いておく。
  $A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とすると、$B_1 := A_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B_2 := A_2^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ であるので、$B_1, B_2 \in W_9$ である。ところで、$B_3 := B_1 + B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ は $\det B_3 = -1 < 0$ である。もし、$B_3 = A^2$ となるような A が存在したとしたら、$\det B_3 = (\det A)^2 \geq 0$ となるはずなので $B_3 \notin W_9$ である。したがって、W_9 は和について閉じていない。

$\boxed{3}$ W_7 は no. 他は全て yes.

- W_7 の S は線型独立でない。実際、$x^2-3(x-1)^2+3(x-2)^2-(x-3)^2=0$ という線形関係式が成り立っている。この線形関係式を求めるには $ax^2+b(x-1)^2+c(x-2)^2+d(x-3)^2=0$ を展開するか値を代入するなどして解いていけば良い。
- 残りの 4 つは生成することと線型独立であることを示していく。
- W_5: 生成すること。3 次の交代行列が、$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & & \\ -a_{23} & 0 & \end{pmatrix}$ であることを証明して、それを用いる。
- W_6: 線形独立。$f_1(x) := \frac{1}{2}(x-1)(x-2), f_2(x) := -x(x-2), f_3(x) := \frac{1}{2}x(x-1)$ とする。$c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+c_3f_3(x)=0$ という線形関係が成り立っていたとする。$x=0$ とすると $c_1=0$ となる。$x=1$ とすると $c_2=0$ となる。$x=2$ とすると $c_3=0$ となる。したがって、線形関係は自明なものに限られる。したがって線形独立である。

  生成：$f(x)=a+bx+cx^2 \in W_6$ とする。$g(x)=af_1(x)+(a+b+c)f_2(x)+(a+2b+4c)f_3(x)$ とする。この時、$h(x) := f(x)-g(x)$ と定めると、h は 2 次以下の多項式で $h(0)=h(1)=h(2)=0$ なので解が 2 個よりも多く存在するので、多項式として $h=0$ である。つまり、$f=g$ であり、f は f_1, f_2, f_3 の線型結合になった。
- W_8: 線形独立を示す。$a\cos x+b\sin x=0$ だとする。$x=0$ を代入すれば $a=0$ となる。$x=\pi/2$ とすると $b=0$ となる。したがって、線形関係は自明なものに限られるので、線形独立である。

  なお、生成することはこの演習問題では認めることにするのだが、参考のために解答を載せておく。$y''+y=0$ に $2y'$ をかけると $2y'y''+2yy'=0$ となる。これは $((y')^2+y^2)'=0$ と書ける。したがって、$(y')^2+y^2$ は定数になる。$(y')^2+y^2=C$ と書く。$y'=\pm\sqrt{C-y^2}$ となる。$\frac{y'}{\sqrt{C-y^2}}=\pm 1$ なので、両辺を x で積分すると、左辺は $\int \frac{y'}{\sqrt{C-y^2}}dx = \int \frac{dy}{\sqrt{C-y^2}} = \arcsin \frac{y}{\sqrt{C}}$ となり、右辺は $\pm x + C_2$ となる。ここで C_2 は積分定数である。したがって、$y=\sqrt{C}\sin(\pm x + C_2) = \pm\sqrt{C}(\cos C_2 \sin x - \sin C_2 \cos x)$ となる。つまり、y は $\sin x, \cos x$ の線型結合で書ける。