

## 数学演習 AII—3 回目：線形空間、線形独立

- 1 (i) 線形空間の定義を書け。  
 (ii) 線形空間  $V$  の3つの元  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  が  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$  を満たすとする。この時、(i) に書いたどの性質をどこで用いたかがわかるように使いながら  $\mathbf{b} = \mathbf{c}$  を証明せよ。
- 2 次の集合  $W_1, W_2, W_3$  に自然な加法とスカラー倍を考えたものは線形空間になるか？
- $W_1$ : 2次以下の多項式  $f(x)$  で、そのグラフ  $y = f(x)$  が  $(x, y) = (1, 1)$  を通るものの全体。
  - $W_2$ : 3次正方行列  $A$  で  $\text{tr}(A) \geq 0$  となるものの全体。
  - $W_3$ : 3次以下の多項式  $f(x)$  で  $x^3 f'''(x) - 3x^2 f''(x) + 6x f'(x) - 6f(x) = x^3$  を満たすものの全体。
- 3 次の線形空間  $W_4, W_5, W_6, W_7, W_8$  に対して、部分集合  $S$  は基底になるか？
- $W_4$  は2次以下の多項式全体、 $S = \{1, x, x^2\}$ 。
  - $W_5$  は3次交代行列の全体、 $S = \{A_1, A_2, A_3\}$ 、ただし、
 
$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
  - $W_6 = W_4$ ,  $S = \{\frac{1}{2}(x-1)(x-2), -x(x-2), \frac{1}{2}x(x-1)\}$ 。
  - $W_7 = W_4$ ,  $S = \{x^2, (x-1)^2, (x-2)^2, (x-3)^2\}$ 。
  - $W_8$  は  $y'' = -y$  を満たす関数の全体、 $S = \{\cos x, \sin x\}$ 。

問題は以上。

コメント：

- 2 3 証明や反例はともかく、yes/no は瞬殺せよ。  
 3  $W_8$ . 定義 5.5 の性質 (1) をちゃんと証明しようとする微積の進んだ知識が必要となるかもしれないので、そこは物理 (波動) の講義で学習したことを楽観的に用いて良い。

時間が余ったら、 $W_9 = \{A^2 \mid A \text{ は実数を成分とする } 2 \text{ 次 の 正 方 行 列 } \}$  は線型空間か？を考えよ