2022/11/2 問題配布分

数学演習 AII 解答例—5 回目：部分空間

$\boxed{1}$ (1) もし $w_1+w_2 \in W_1$ ならば、$w_2 = (w_1+w_2)+(-1)w_1 \in W_1$ となり仮定に反するので $w_1+w_2 \notin W_1$ である。もし $w_1+w_2 \in W_1$ ならば、$w_1 = (w_1+w_2)+(-1)w_2 \in W_2$ となり仮定に反するので $w_1+w_2 \notin W_2$ である。従って、$w_1+w_2 \notin W_1 \cup W_2$ である

(2) 示したい命題の対偶命題は「$W_1 \not\subset W_2$ かつ $W_2 \not\subset W_1$ ならば $W_1 \cup W_2$ は部分空間でない」である。これを示す。仮定 $W_1 \not\subset W_2$ より、$w_1 \in W_1, w_1 \notin W_2$ となるような w_1 が存在する。仮定 $W_2 \not\subset W_1$ より、$w_2 \in W_2, w_2 \notin W_1$ となるような w_2 が存在する。この時、$w_1 \in W_1 \subset W_1 \cup W_2$, $w_2 \in W_1 \subset W_1 \cup W_2$ であるが、一方で (1) より $w_1+w_2 \notin W_1 \cup W_2$ となる。つまり、$W_1 \cup W_2$ は和について閉じていない。従って、$W_1 \cup W_2$ は部分空間ではない。

$\boxed{2}$ 区間 $[a,b]$ 上の連続関数全体のなす線形空間を $C([a,b])$ とする。写像 $T : C^2([a,b]) \to C([a,b])$ を

$$T(y) = P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y$$

と定める。[「y が C^2 級である時に、$T(y)$ が連続関数になる」ことを用いている。なお、$T : C^2([a,b]) \to C^2([a,b])$ ではないことに注意。] この時、考えている集合は $\mathrm{Ker}(T)$ と書ける。T が線型写像であることを示す。

$$\begin{aligned}
T(y_1+y_2) &= P(x)\frac{d^2(y_1+y_2)}{dx^2} + Q(x)\frac{d(y_1+y_2)}{dx} + R(x)(y_1+y_2) \\
&= P(x)\frac{d^2y_1}{dx^2} + Q(x)\frac{dy_1}{dx} + R(x)y_1 + P(x)\frac{d^2y_2}{dx^2} + Q(x)\frac{dy_2}{dx} + R(x)y_2 \\
&= T(y_1) + T(y_2), \\
T(ky) &= P(x)\frac{d^2(ky)}{dx^2} + Q(x)\frac{d(ky)}{dx} + R(x)ky \\
&= k\left(P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y\right) \\
&= kT(y).
\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ 写像 $T : V \to V$ を $T(\{a_n\}) = \{a_{n+2} - pa_{n+1} - qa_n\}$ と定める。この時、考えている集合は $\mathrm{Ker}(T)$ と書ける。T が線型写像であることを示す。

$$\begin{aligned}
T(\{a_n\} + \{b_n\}) &= T(\{a_n + b_n\}) \\
&= \{(a_{n+2} + b_{n+2}) - p(a_{n+1} + b_{n+1}) - q(a_n + b_n)\} \\
&= \{a_{n+2} - pa_{n+1} - qa_n + b_{n+2} - pb_{n+1} - qb_n\} \\
&= \{a_{n+2} - pa_{n+1} - qa_n\} + \{b_{n+2} - pb_{n+1} - qb_n\} \\
&= T(\{a_n\}) + T(\{b_n\}), \\
T(k\{a_n\}) &= T(\{ka_n\}) \\
&= \{ka_{n+2} - pka_{n+1} - qka_n\} \\
&= \{k(a_{n+2} - pa_{n+1} - qa_n)\} \\
&= k\{a_{n+2} - pa_{n+1} - qa_n\} \\
&= kT(\{a_n\}).
\end{aligned}$$

１つ目と４つ目の等号は数列の和やスカラー倍の定義、２つ目と５つ目の等号は写像 T の定義、３つ目の等号は実数の結合法則や分配法則。

コメント：

- $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ではない。
- $T(a_n) = a_{n+2} - pa_{n+1} - qa_n$ ではない。
- T は $\{a_1, a_2, a_3, ...\}$ を $\{a_3 - pa_2 - a_1, a_4 - pa_3 - qa_2, a_5 - pa_4 - qa_3, ...\}$ に写す写像である。