2022/11/2 配布

数学演習 AII—5 回目：部分空間、線形写像

$\boxed{1}$ W_1, W_2 を線形空間 V の部分空間とする。

(i) 次の条件を満たす $w_1, w_2 \in V$ が存在するとする：

$$w_1 \in W_1, \quad w_1 \notin W_2, \quad w_2 \in W_2, \quad w_2 \notin W_1.$$

この時、$w_1 + w_2 \notin W_1 \cup W_2$ であることを示せ。

(ii) $W_1 \cup W_2$ が V の部分空間であれば、$W_1 \subset W_2$ または $W_2 \subset W_1$ となることを示せ。

$\boxed{2}$ 区間 $[a,b]$ 上の連続関数 $P(x), Q(x), R(x)$ が与えられている。次の微分方程式

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0$$

を満たす関数 $y = y(x)$ の全体が、線形空間 $V = C^2([a,b])$ の部分空間になることを次の方法で示せ。
適切な写像 $T : \boxed{\text{あ}} \to \boxed{\text{い}}$ を定義し、考えている関数の集合を核空間 $\mathrm{Ker}(T)$ として書き表し、T が線型写像であることを示す。

$\boxed{3}$ 数列 $\{a_n\}$ の全体のなす線形空間を V とする。実数 p, q を固定する。漸化式 $a_{n+2} = p\,a_{n+1} + q\,a_n$ を満たす数列の全体は V の部分空間になることを次の方法で示せ。
適切な写像 $T : \boxed{\text{あ}} \to \boxed{\text{い}}$ を定義し、考えている関数の集合を核空間 $\mathrm{Ker}(T)$ として書き表し、T が線型写像であることを示す。

問題は以上。

出典：$\boxed{1}$ p146, 例 5.24(p146) の一般化, $\boxed{2}$ p124, 練習問題 5.7(1), $\boxed{3}$ p124, 練習問題 5.6(1).

コメント：

$\boxed{1}$ (2) この結果より、和集合が部分空間となるのは練習問題 5.19(p145) のような特別な場合しかないことが示された。

$\boxed{2}$ 区間 $[a,b]$ 上の 2 回連続微分可能な関数の全体 $C^2([a,b])$ は、例 5.2 のように和やスカラー倍を定義することによって自然に線形空間とみなしている。そのことは証明しなくて良い。

$\boxed{3}$ 数列 $\{a_n\}$ に対して例 5.5 のように和とスカラー倍を定義することによって、数列全体を線形空間とみなす。そのことは証明しなくて良い。