2022/11/16 問題配布分

数学演習 AII 解答例—7 回目：線型写像、直和

$\boxed{1}$ 線形性の証明：それぞれ $T(f+g)=T(f)+T(g)$, $T(kf)=kT(f)$ を確認すれば良い。

なお、(v) は問題文に誤植があり、$Tf=\int_{-1}^{1} f(x)dx$ で定まる $T:V\to\mathbb{R}$ が正しい。[Tf は実数値であり、x の関数ではないから。]

なお、コメントに書いた (ii)(iii)(iv) の場合の<u>$f\in V$ ならば $Tf\in V$ である</u>ことの証明：f が n 次以下の多項式の場合に、Tf も n 次以下の多項式であることを示せばよい。

(ii) f が $n-1$ 次以下の多項式ならば Tf は n 次以下の多項式である。また、$f=x^n$ ならば $Tf=0$ である。任意の n 次多項式は $n-1$ 次以下の多項式と x^n の線形結合で書けるので、Tf も n 次以下の多項式である。[ポイントは次数が $n+1$ にならないこと。]

(iii) $Tf=e^x\{(e^{-x})'f+e^{-x}f'\}=e^x\{-e^{-x}f+e^{-x}f'\}=f+f'$ である。従って、f が n 次以下の多項式の場合に、Tf も n 次以下の多項式である。[ポイントは多項式になること。つまり指数関数が消えること。]

(iv) $f(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ の時、$(Tf)(x)=\dfrac{1}{x-1}\int_1^x \sum_{k=0}^{n} c_k t^k dt=\dfrac{1}{x-1}\sum_{k=0}^{n} c_k[\dfrac{1}{k+1}t^{k+1}]_{t=1}^{t=x}=\dfrac{1}{x-1}\sum_{k=0}^{n} c_k\dfrac{1}{k+1}(x^{k+1}-1)=\sum_{k=0}^{n} c_k(1+x+\cdots+x^k)$ と書き表すと n 次以下の多項式であることがわかった。[ポイントは多項式になること (つまり有理式が割り算できること)、次数が n 次以下になることの両方。]

$\boxed{2}$ (i) $\boldsymbol{x}=W_1\cap W_2$ とする。$\boldsymbol{x}\in W_1$ なので、$\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{y}$ と書ける。このとき、$\boldsymbol{x}\in W_2$ なので、$\mathbf{0}=A\boldsymbol{x}=A^2\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$. 従って、(i) が示せた。

(ii) $\boldsymbol{x}_1=A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{x}-A\boldsymbol{x}$ と置くと $\boldsymbol{x}_1\in W_1$ であり、また、$A\boldsymbol{x}_2=A\boldsymbol{x}-A^2\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ なので $\boldsymbol{x}_2\in W_2$ である。