

2022/11/16 配布

数学演習 AII—7 回目：線型写像、直和

1 n を自然数とする。 n 次以下の多項式

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

の全体のなす線形空間を V とする。このとき、以下の T は線型写像であることを示せ。

- (i) $(Tf)(x) = f(x+2)$ で定まる $T: V \rightarrow V$.
- (ii) $(Tf)(x) = x^2f'(x) - nxf(x)$ で定まる $T: V \rightarrow V$.
- (iii) $(Tf)(x) = e^x(e^{-x}f(x))'$ で定まる $T: V \rightarrow V$.
- (iv) $(Tf)(x) = \frac{1}{x-1} \int_1^x f(t)dt$ で定まる $T: V \rightarrow V$.
- (v) $(Tf)(x) = \int_{-1}^1 f(x)dx$ で定まる $T: V \rightarrow \mathbb{R}$.

2 A を n 次正方行列とする。 $V = \mathbb{R}^n$ を n 次の列ベクトルのなす線形空間とする。線型写像 $f: V \rightarrow V$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ によって定める。 $W_1 = \text{Im}(f)$, $W_2 = \text{Ker}(f)$ とする。 $A^2 = A$ とする。次を示せ。

- (i) $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ である。
- (ii) 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ が、適当な $\boldsymbol{x}_1 \in W_1, \boldsymbol{x}_2 \in W_2$ を用いて $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ と書ける。

問題は以上。

コメント：

1 練習問題 6.4(p166-167).

1 (ii)(iii)(iv) では、 $f \in V$ ならば $Tf \in V$ であること [つまり、 $f: V \rightarrow V$ が写像になっていること] も証明してください。

2 練習問題 6.6(p167) の発展問題。2つ目の性質 (ii) は 5.4 節の用語を用いると $V = W_1 + W_2$ と書ける。そして、(i)(ii) を合わせた結果は、「 $V = W_1 \oplus W_2$ である」と短く述べるができる。

9 時間が余ったら、練習問題 5.21, 5.23, 5.24, 5.25 に取り組んでください。これは必須ではありません。