2022/12/14 問題配布分

数学演習 AII 解答例—9 回目：線型写像の表現行列、固有値・固有ベクトル

$\boxed{1}$

$$
\begin{aligned}
D(f_1) &= (e^{2x}\cos 3x)' = 2e^{2x}\cos 3x - 3e^{2x}\sin 3x = 2f_1 - 3f_2,\\
D(f_2) &= (e^{2x}\sin 3x)' = 2e^{2x}\sin 3x + 3e^{2x}\cos 3x = 3f_1 + 2f_2.
\end{aligned}
$$

従って、

$$
(D(f_1) \quad D(f_2)) = (f_1 \quad f_2)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.
$$

最後の行列が表現行列。

$\boxed{2}$

$$
\begin{aligned}
f(E_1) &= ZE_1 - E_1Z = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -2E_2 - 3E_3,\\
f(E_2) &= ZE_2 - E_2Z = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -5 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2E_1 - 5E_3,\\
f(E_3) &= ZE_3 - E_3Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 3E_1 + 5E_2
\end{aligned}
$$

となる。従って、

$$
(f(E_1) \quad f(E_2) \quad f(E_3)) = (E_1 \quad E_2 \quad E_3)\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}
$$

ここに現れた 3 次の正方行列が A である。従って特に、単位行列を E とすると、$A = Z - E$ となっている。

$\boxed{3}$ (1)

$$
\begin{aligned}
\Phi_A(\lambda) &= (\lambda - a)^2 + b^2,\\
\text{固有値} &= a + bi, a - bi,\\
W(a+ib) &= \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}),\\
W(a-ib) &= \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}),\\
P &= \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\\
\Lambda = P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} a+bi & 0 \\ 0 & a-bi \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

固有値や固有ベクトルは、パラメータ a, b には依存しない。

(2)

$$\begin{aligned}
\Phi_A(\lambda) &= \lambda^2 - 1, \\
\text{固有値} &= 1, -1, \\
W(1) &= \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}), \\
W(-1) &= \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}), \\
P &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \\
\Lambda = P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

固有値はパラメータ θ に依存しないが、固有ベクトルは θ に依存している。なお、固有ベクトルは半角ではなく $\begin{pmatrix} 1+\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ のように書いても良い。ただし、この表示をすると、$\theta = \pi$ の時に零ベクトルになってしまうので、その場合は場合分けをする必要がある。出題の趣旨としては、細かい場合分けを期待してはいないので、典型的な場合が (たとえば θ は π の整数倍ではないと仮定して) 計算できれば良い。

(3)

$$\begin{aligned}
\Phi_A(\lambda) &= (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2), \\
\text{固有値} &= -1, 1, 2, \\
W(-1) &= \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}), \\
W(1) &= \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}), \\
W(2) &= \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}), \\
P &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\
\Lambda = P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
\Phi_A(\lambda) &= (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-2a-2), \\
\text{固有値} &= 1, 2, 2a+2.
\end{aligned}$$

場合 (i) $2a+2 \neq 1, 2$ の場合。

$$W(1) = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} a \\ a \\ -a-1 \end{pmatrix}),$$
$$W(2) = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}),$$
$$W(2a+2) = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}),$$
$$P = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ -a-1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\Lambda = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2a+2 \end{pmatrix}.$$

固有値も固有ベクトルも a に依存するものとしないものがあり、混ざっている。

場合 (ii) $2a+2 \neq 2$ の場合。つまり $a=0$ の場合。

$$W(1) = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}),$$
$$W(2) = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}), (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}),$$
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\Lambda = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

形式的には (i) で $a=0$ としたものと一致するが、証明や計算はそれぞれで行う必要がある。特に、$W(2)$ は 2 次元になるところが顕著な違いである。$W(2)$ の基底の取り方は色々あり、どの基底を選んでも正解である。

場合 (iii) $2a+2 \neq 1$ の場合。つまり $a=-1/2$ の場合。この場合、対角化可能でないので、つまり、問題文で要請した「正則行列 P で、$P^{-1}AP =: \Lambda$ が対角行列になるような P と Λ」は存在しないので、問題文が誤っている。出題ミスです、御免なさい。

$$W(1) = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} a \\ a \\ -a-1 \end{pmatrix}),$$
$$W(2) = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$$

であるので、固有ベクトルはそれぞれで 1 次元、つまり全体で 2 次元しか存在しない。従って

定理 6.13 の右側が不成立なので、左側が不成立、つまり、対角化不可能であることが厳密に証明できた。