

2022/12/14 配布

数学演習 AII—9 回目：線型写像の表現行列、固有値・固有ベクトル

- 1 $f_1(x) = e^{2x} \cos 3x, f_2(x) = e^{2x} \sin 3x$ と定める。 $\{f_1, f_2\}$ を基底とする線形空間を V とする。
線型写像 $D = \frac{d}{dx} : V \rightarrow V$ の表現行列 A を求めよ。

- 2 $Z = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \\ -3 & -5 & 1 \end{pmatrix}, E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。
3 交代行列全体のなす線形空間を V とする。線型写像 $f : V \rightarrow V$ を $f(X) = ZX - XZ$ と定める。
 V の基底 $\{E_1, E_2, E_3\}$ に関する f の表現行列 A を求めよ。

- 3 次の行列 A の固有多項式、固有値、固有値 λ に対する固有空間 $W(\lambda)$ を求めよ。
また、適切な正則行列 P で、 $P^{-1}AP = \Lambda$ が対角行列になるような P と Λ を求めよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, ただし $b \neq 0$ と仮定する。

(2) $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$.

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(4) $A = \begin{pmatrix} 2 & a & a \\ 0 & a+2 & a \\ 0 & a+1 & a+1 \end{pmatrix}$.

問題は以上。

出典

- 1 p188, 練習問題 6.14(1) の類題。
2 p188, 練習問題 6.15(2) の類題。
3 (1) p193, 例 6.21.
3 (3) p245, 練習問題 7.12(1).
3 (4) p199, 練習問題 6.20.

コメント：

- 1 D が線型写像であることは証明せずに認めて良い。
2 $\{E_1, E_2, E_3\}$ が基底になることや、 f が線型写像になることは証明せずに認めて良い。