2022/6/22 配布

数学演習 IA—10 回目：線形独立、内積外積

$\boxed{1}$ $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ に対して、次の公式を示せ。

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})$$

$\boxed{2}$ ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ のいくつかの元 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ を考える。次の補題のうち、(1)(4)(5) を示せ。

(1) k 本のベクトル $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ が線形独立であれば、そのうちの 1 本を減らした $(k-1)$ 本のベクトル $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}$ も線形独立である。

(2) 線形独立なベクトルの集まりが与えられた時、そのどんな部分集合も線形独立である。

(3) 何本かのベクトルの集まりが与えられた時、そのある部分集合が線形従属であれば、もとの集合も線形従属である。

(4) 何本かのベクトルの集まりが与えられた時、そのうちのある 2 本のベクトルが同じベクトルであれば、線形従属である。

(5) 何本かのベクトルの集まりが与えられた時、ある 1 本が零ベクトルであれば、線形従属である。

$\boxed{3}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の行ベクトルを $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ とし、列ベクトルを $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6, \mathbf{b}_7$ とする。次の問いに答えよ。
(1)(2)(3)(6)(7) は答えだけで良い。
(4)(5)(8)(9) は説明も加えよ。

(1) 行列 A は簡約か？

(2) 行列 A の階数 $r = \mathrm{rank} A$ を求めよ。

(3) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は線形独立か？

(4) 行列 A の 3 本の線形独立な行ベクトルの組は (3) に挙げたもの以外にあるか？

(5) $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_5$ は線形独立か？

(6) $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_7$ は線形独立か？

(7) $\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_6$ は線形独立か？

(8) $\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_6, \mathbf{b}_7$ は線形独立か？

(9) 行列 A の 3 本の線形独立な列ベクトルの組は何組あるか？

$\boxed{4}$ 実数 k を一つ固定する。ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の 5 つの元 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$ を考える。$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ が線形独立であり、$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5$ が線形従属であれば、$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 + k\mathbf{a}_5$ は線形独立であることを示せ。

問題は以上。

出典または類題または出題の狙い：

$\boxed{1}$ p114 練習問題 4.3(3)。

$\boxed{2}$ p100 に現れた用語の定義を確認する問題。

$\boxed{3}$「線形独立な行ベクトルの最大数」を理解する問題

$\boxed{4}$ 定理 3.18(p93) の証明の 6 行目から 11 行目の議論を翻訳したもの。

ヒントは裏面：

$\boxed{2}$ なお、(2) は (1) を繰り返せばよい。(3) は (2) の対偶である。

$\boxed{2}$ 前の番号の小問の性質は用いて良い。例えば (5) を示すときに (3) を使っても良い。もちろん使わなくても良い。

$\boxed{2}$ (4) 設定が分かりづらいかもしれないが、例えば、$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{a}_4 = \mathbf{e}_1$ のような状況を想定している。

$\boxed{4}$ やり方はいろいろあるが、例えば、$\mathbf{a}_5$ は $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ の線形結合で表せるか？