2022/7/6 問題配布分

数学演習 IA 解答例—12 回目：行列式、置換と符号

$\boxed{1}$ $\det A = 25, \det B = 21, \det C = r^2 \sin\theta, \det D = abcd, \det E = 1.$

３次の行列 A, C はたすきがけ (サラスの公式) によるを想定しているが、掃き出し法 (基本変形) などを用いても良い。混用しても良い (少し基本変形してからたすきがけを使う)。４次の行列 B は基本変形を想定しているが 3.3 節などの方法 (展開) を用いても良い。対角行列 D, E は行列式の定義式で $\sigma = e$ の項しか出てこない、という解答を想定している。

文字の入った行列式は次回の演習 (7/20) で扱う。

$\boxed{2}$ (1) 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ に対して、

$$(12) \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$(24) \circ (12) \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$(35) \circ (24) \circ (12) \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = e \text{ なので、} \sigma = (12) \circ (24) \circ (35).$$

なお、置換を互換の積に表す方法は何通りもあるので (p61)、正しい答えはいくつもある。

(2) 奇置換であり、$\mathrm{sgn}\ \sigma = -1.$

なお、転倒数は $l(\sigma) = \#\{(1,4), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5)\} = 5$ であり、やはり、$\mathrm{sgn}\ \sigma = -1.$

$\boxed{3}$ (a) を示す。

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} p_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \delta_{k,\sigma(j)} = a_{i\sigma(j)}$$

である。つまり、B の第 j 列は A の第 $\sigma(j)$ 列である。

問題は以上。

出典やヒント：

$\boxed{1}$ 練習問題 3.1, 3.2(p68)。なお、学習した範囲の内容 (3.2 節の基本変形まで) で解けるのだが、まだ学習していない行列式の性質 (3.3 節やそれ以降) を用いて解いても差し支えない。

$\boxed{1}$ $\det C$ は微積の教科書の定理 6.4.9(p236) にも登場する。

$\boxed{2}$ 定理 3.1(1) の証明の手順の確認。p60 から p61 の手順の確認。なお (2) は (1) を用いても良いし、転倒数 $l(\sigma)$ を用いても良い。

$\boxed{3}$ まだやってないが、定理 3.8(p73) を題材とした問題。なお、$\det P_\sigma = \mathrm{sgn}\ \sigma$ であることを示したい。