2022/7/6 配布

数学演習 IA—12 回目：行列式

$\boxed{1}$ 次の行列 A, B, C, D, E の行列式を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix},$$

対角行列 $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$, 単位行列 E.

$\boxed{2}$ 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in S_5$ を考える。

(1) σ を互換の積で表せ。

(2) 符号 $\mathrm{sgn}\ \sigma$ を求めよ。

$\boxed{3}$ 置換 $\sigma \in S_n$ に対して, n 次正方行列 $P_\sigma = (p_{ij})$ を $p_{ij} = \delta_{i,\sigma(j)}$ で定める。ただし δ_{xy} はクロネッカーのデルタである。A を n 次正方行列とし、行列 $B = AP_\sigma$ と定める。次の主張 (a)(b)(c)(d) のうち正しいものを一つ選び証明せよ。

(a) 行列 B の第 1 列, 第 2 列,..., 第 n 列は, 行列 A の第 $\sigma(1)$ 列, 第 $\sigma(2)$ 列,..., 第 $\sigma(n)$ 列である.

(b) 行列 B の第 1 行, 第 2 行,..., 第 n 行は, 行列 A の第 $\sigma(1)$ 行, 第 $\sigma(2)$ 行,..., 第 $\sigma(n)$ 行である.

(c) 行列 A の第 1 列, 第 2 列,..., 第 n 列は, 行列 B の第 $\sigma(1)$ 列, 第 $\sigma(2)$ 列,..., 第 $\sigma(n)$ 列である.

(d) 行列 A の第 1 行, 第 2 行,..., 第 n 行は, 行列 B の第 $\sigma(1)$ 行, 第 $\sigma(2)$ 行,..., 第 $\sigma(n)$ 行である.

問題は以上。

出典やヒント：

$\boxed{1}$ 練習問題 3.1, 3.2(p68)。なお、学習した範囲の内容 (3.2 節の基本変形まで) で解けるのだが、まだ学習していない行列式の性質 (3.3 節やそれ以降) を用いて解いても差し支えない。

$\boxed{1}$ $\det C$ は微積の教科書の定理 6.4.9(p236) にも登場する。

$\boxed{2}$ p60 から p61 の手順の確認。なお (2) は (1) を用いても良いし、転倒数 $l(\sigma)$ を用いても良い。

$\boxed{3}$ まだやってないが、定理 3.8(p73) を題材とした問題。なお、$\det P_\sigma = \mathrm{sgn}\ \sigma$ であることを示したい。