2022/7/20 問題配布分

数学演習 IA 解答例—14 回目：行列式 (パラメータを含むもの)

$\boxed{1}$

- $\det A$. たすきがけで計算して因数分解してもいい。あるいは、別解として、第１列を第３列に加えると、

$$\det A = \begin{pmatrix} a & a^2 & a+b+c \\ b & b^2 & a+b+c \\ c & c^2 & a+b+c \end{pmatrix} = (a+b+c)\begin{pmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{pmatrix} = (a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b).$$

二つ目の等号では線形性を、最後の等号ではファンデルモンド行列式を用いた。

$\boxed{2}$ $a = b$ の時は第１行と第２行が一致、$a = c$ の時は第１行と第３行が一致、$b = c$ の時は第２行と第３行が一致しているので、行列式の交代性より $\det A = 0$ となる。$a + b + c = 0$ の時は、第３列が第１列の (-1) 倍になっている。

- $\det B, C, D$ は基本変形で 0 を増やすか、あるいは余因子展開でサイズを３以下に下げてたすきがけを用いるなどの方法で求めることができる。求め方はさまざまあるし、どのやり方も好ましい。一通り答案を書いてみると、

$$\det B = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-x & 1-x \\ x & 1 & x & x \\ 1-x & 1-x & 0 & 0 \\ x & x & x & 1 \end{pmatrix} = (1-x)^2 \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ x & 1 & x & x \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ x & x & x & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (x-1)^2 \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \end{pmatrix} = -(x-1)^2 \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x & 1 \end{pmatrix}$$

$= -(x-1)^2 \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & 1 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & 1 \end{pmatrix} = -(x-1)^4$. ここで、最初の等号では第１行から第２行を引き、第３行から第４行を引いた。二つ目の等号では第１行と第３行からスカラー倍 $(1-x)$ を括り出した。三つ目の等号では第２行から第１行の x 倍を引き、第４行から第３行の x 倍を引いた。四つ目の等号では第１行と第３行を入れ替えた。この行列はブロック対角行列なので、行列式は対角ブロックの行列式の積になる。

$\boxed{2}$ $x = 1$ の時には、すべての行が一致、すべての列が一致する。行列式の交代性より $\det B = 0$ となる。

- $$\det C = \det\begin{pmatrix} x-2 & 0 & 2-x & 0 \\ 0 & x-2 & 0 & 2-x \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 1 & 2 & 1 & x \end{pmatrix} = (x-2)^2 \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 1 & 2 & 1 & x \end{pmatrix}$$

$$= (x-2)^2 \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & x+2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & x+2 \end{pmatrix} = (x-1)^2 \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} x+2 & 2 \\ 2 & x+2 \end{pmatrix}$$

$= (x-1)^2 \times \{(x+2)^2 - 2^2\} = x(x+4)(x-2)^2$. ここで、最初の等号では第１行から第３行を引

き、第２行から第４行を引いた。二つ目の等号では第１行と第３行からスカラー倍 $(x-2)$ を括り出した。三つ目の等号では第３列に第１列を足し、第４列に第２列を足した。この行列はブロック三角行列なので、行列式は対角ブロックの行列式の積になる。

$\boxed{2}$ $x=2$ の時は第１行と第３行が一致する。$x=0$ や $x=-4$ の時はすぐにはわからない。

[なお $x=0$ の時は第１行と第３行を足したものが第２行と第４行を足したものと一致する。$x=4$ の時は、すべての行を足したものが零ベクトルである。]

- $\det D = x^2(x+2)(x-2)$.

  $\boxed{2}$ $x=0$ の時は第１行と第２行が一致する。$x=2$ や $x=-2$ の時はすぐにはわからない。

  [なお、$x=2$ の時は第１行と第２行を足したものが第３行と第４行を足したものと一致する。$x=-2$ の時は、すべての行を足したものが零ベクトルである。]

$\boxed{3}$ $\det(xE_5 - A) = x^5 - a_0x^4 + a_1x^3 - a_2x^2 + a_3x - a_4$. なお
$\det(xE_5 + A) = x^5 + a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$ である。これが出題意図だったので、つまり、出題ミスと言えよう。

第１行に関する余因子展開を行なって数学的帰納法を用いるのが<u>普通の解法</u>である。ただし、私の出題ミスのために、帰納法の結果が使いづらくなっていてごめんなさい。

あるいは、別の解法として、第１列に関する余因子展開を行えば一気に答えまで辿り着くが、ただし、各余因子の計算をする必要がある。例えば、$\det(xE_5 - A)$ の $(2,1)$ 成分の余因子は $(-1)^{2+1}\det\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&x&1&0\\0&0&x&1\\0&0&0&x\end{pmatrix}$ のように上三角行列となり、対角成分は 1 が一つ、x が 3 つであり、余因子は $-x^3$ となる。このようにして、

$$\begin{aligned}\det(xE_5 - A) &= (x-a_0)x^4 + (-a_1)(-x^3) + (-a_2)x^2 + (-a_3)(-x) + (-a_4)1\\ &= x^5 - a_0x^4 + a_1x^3 - a_2x^2 + a_3x - a_4\end{aligned}$$

となる。

$\boxed{4}$ 定理 3.14' で証明した

$$A\tilde{A} = (\det A)E$$

の両辺の行列式を考えると、

$$\det(A)\det(\tilde{A}) = \det(A\tilde{A}) = \det((\det A)E) = (\det A)^n\det(E) = (\det A)^n.$$

ここで最初の等号は積公式、三つ目の等号は多重線形性を用いた。A が正則の時 $\det A \neq 0$ であるから、上の式の両辺を <u>$\det A$ で割り算</u>すると、$\det\tilde{A} = (\det A)^{n-1}$. 証明終わり。

A が正則でない時は、上の割り算の部分の議論を次のように丁寧に書き換えれば良い：ここまでの議論で、$(\det A)(\det\tilde{A} - (\det A)^{n-1}) = 0$ となっている。ここで、$A=(a_{ij})$ の成分 a_{ij} を成分とする多項式を $f = \det A$, $g = \det\tilde{A} - (\det A)^{n-1}$ と定義する。この時、上で証明したことは、「すべての A に対して、$fg=0$ である」と言い換えることができる。従って、多項式として、$f=0$ または $g=0$ である。ところが行列式は $A=E$ の時、$f=\det(E)=1\neq 0$ なので、「多項式として $f=0$」にはならない。従って、「多項式として $g=0$」である。特にすべての A に対して $g=0$ であるので、$\det\tilde{A} = (\det A)^{n-1}$ がすべての A に対して成り立つことが示せた。