2022/4/20 問題配布

数学演習 IA 解答例—2 回目：行列の積 (和、スカラー倍)

$\boxed{1}$ 両辺の (i,j) 成分を比較する。

$$
\begin{aligned}
(A(B+C))_{ij} &= \sum_k A_{ik}(B+C)_{kj} \\
&= \sum_k A_{ik}(B_{kj}+C_{kj}) \\
&= \sum_k (A_{ik}B_{kj}+A_{ik}C_{kj}) \\
&= \sum_k A_{ik}B_{kj} + \sum_k A_{ik}C_{kj} \\
&= (AB)_{ij} + (AC)_{ij} \\
&= (AB+AC)_{ij}
\end{aligned}
$$

ここまで丁寧に書く必要は全くない。なお、等号成立の理由は、１つ目と５つ目の等号は行列の積の定義、２つ目と６つ目の等号は行列の和の定義、３つ目の等号は数の分配法則、４つ目の等号は和の記号と和の関係。これもここまで丁寧に書く必要はない。また、$\sum$ 記号を使わずに $+\cdots+$ を用いて書いても差し支えない。

$\boxed{2}$ $A=(a_{ij}), B=(B_{ij})$ を上三角行列とし、$C=AB$ と定める。$i>j$ とし、C の (i,j) 成分を計算する。

$$
\begin{aligned}
C_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=i}^{n} a_{ik}b_{kj} \qquad (\bigstar)
\end{aligned}
$$

となる。ここで、$k \leq i-1$ の時は $k<i$ なので $a_{ik}=0$ であるから、($\bigstar$) の第１項は 0 である。次に $k \geq i$ の時は、$k \geq i > j$ なので $b_{kj}=0$ であるから、($\bigstar$) の第２項は 0 である。従って $C_{ij}=0$ であるから C は上三角行列である。

$\boxed{3}$ $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とする。まず、準備として、A がスカラー行列でない時には「$XA=AX$ ならば、$X=pE+qA$ となるようなスカラー p,q が存在する」ことを証明する。

$$
\begin{aligned}
XA-AX &= \begin{pmatrix} ax+cy & bx+dy \\ az+cw & bz+dw \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} cy-bz & b(x-w)-(a-d)y \\ (a-d)z-c(x-w) & bz-cy \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

なので、条件 $XA=AX$ は、これらの４つの成分が 0 であるという式になる。(2,2) 成分は (1,1) 成分のマイナス１倍なので、以下考えない。ここで場合を３つに分ける。

(1) $b \neq 0$ の時。(1,1) 成分と (1,2) 成分が 0 であるという式から、

$$\begin{aligned} z &= \frac{c}{b}y, \\ x - w &= \frac{a-d}{b}y \end{aligned}$$

となる。従って、

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} w + \frac{a-d}{b}y & y \\ \frac{c}{b}y & w \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} w - \frac{d}{b}y & 0 \\ 0 & w - \frac{d}{b}y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a}{b}y & y \\ \frac{c}{b}y & \frac{d}{b}y \end{pmatrix} \\ &= (w - \frac{d}{b}y)E + \frac{y}{b}A \end{aligned}$$

となる。

(2) $c \neq 0$ の時。(1,1) 成分と (2,1) 成分が 0 であるという式から、

$$\begin{aligned} y &= \frac{b}{c}z, \\ x - w &= \frac{a-d}{c}z \end{aligned}$$

となる。従って、

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} w + \frac{a-d}{c}z & \frac{b}{c}z \\ z & w \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} w - \frac{d}{c}z & 0 \\ 0 & w - \frac{d}{c}z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a}{c}z & \frac{b}{c}z \\ z & \frac{d}{c}z \end{pmatrix} \\ &= (w - \frac{d}{c}z)E + \frac{z}{c}A \end{aligned}$$

となる。

(3) $b = c = 0$ の時。この時、A はスカラー行列でないので、$a - d \neq 0$ である。(1,1) 成分と (2,1) 成分が 0 であるという式から、

$$\begin{aligned} -(a-d)y &= 0, \\ (a-d)z &= 0 \end{aligned}$$

となるので、$y = z = 0$ である。従って、

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} \\ &= \frac{aw - dx}{a-d}E + \frac{x-w}{a-d}A \end{aligned}$$

となる。

以上より、$XA = AX$ ならば、$X = pE + qA$ となるようなスカラー p, q が存在することが示せた。
これを $YA = AY$ に適用すれば、$Y = rE + sA$ となるようなスカラー r, s が存在する。この時、

$$\begin{aligned} XY - YX &= (pE + qA)(rE + sA) - (rE + sA)(pE + qA) \\ &= (prE + psA + qrA + qsA^2) - (prE + psA + qrA + qsA^2) \\ &= O \end{aligned}$$

となるので $XY = YX$ である。