2022/5/11 問題配布分

# 数学演習 IA 解答例—4 回目：転置行列、逆行列

まず、$\boxed{1}$, $\boxed{2}$ と $\boxed{3}$(5)(6) は教科書の解答を見てください。

$\boxed{1}$ あえて、教科書とは、やや雰囲気が異なるように記述してみる：$X = A^{-1}$ は $AX = E = XA$ を満たす。転置行列を考えると、左辺は ${}^t(AX) = {}^tX\ {}^tA$, 右辺は ${}^t(XA) = {}^tA\ {}^tX$, 中辺は ${}^tE = E$ である。従って、${}^tA$ は正則であり、その逆行列が ${}^tX = {}^t(A^{-1})$ であることが証明された。

$\boxed{2}$ 教科書 p337 の解答と同じ。${}^tA = A$, ${}^tB = -B$ なので、${}^t(AB) = {}^tB\ {}^tA = (-B)A = -BA$. 両辺のトレースを考えると、p16, line $-4$ の性質より左辺は $\mathrm{tr}{}^t(AB) = \mathrm{tr}(AB)$. 一方、右辺は p15, line 5 の性質より $\mathrm{tr}(-BA) = -\mathrm{tr}(BA) = -\mathrm{tr}(AB)$. 従って、$2\mathrm{tr}(AB) = 0$ となるので、$\mathrm{tr}(AB) = 0$.

$\boxed{3}$ (5) $z = a + bi, w = c + di$ とすると、$\iota(z) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \iota(w) = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$ なので、$\iota(zw) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix}$. 一方、$zw = (ac-bd) + (ad+bc)i$ なので、$\iota(zw) = \begin{pmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix}$. 両者は一致しているので、(5) が証明できた。

(6) $z = a + bi$ とすると、$\iota(z) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ なので、その逆行列は $(\iota(z))^{-1} = \dfrac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.
一方、複素数の逆数は $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a+bi} = \dfrac{a-bi}{a^2+b^2} = \dfrac{a}{a^2+b^2} + i\dfrac{-b}{a^2+b^2}$ ゆえ、それを写像 $\iota$ で写すと、$\iota(\frac{1}{z}) = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{-b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$ となる。両者は一致しているので、(6) が証明できた。

(6) 別解。(5) を用いる。
$\iota(z)\iota(\frac{1}{z}) \overset{(5)}{=} \iota(z\frac{1}{z}) = \iota(1) \overset{(2)}{=} E$, $\iota(\frac{1}{z})\iota(z) \overset{(5)}{=} \iota(\frac{1}{z}z) = \iota(1) \overset{(2)}{=} E$ なので、$\iota(\frac{1}{z})$ は $\iota(z)$ の逆行列である。

(7) $z = a+bi$ とすると、$\iota(z) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ なので、その転置行列は ${}^t(\iota(z)) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \iota(a-bi) = \iota(\overline{z})$.

$\boxed{4}$ 行列 $AE_{ji}$ の $i$ 列目以外の成分は 0 である。$(k,i)$ 成分は、$A$ の $k$ 行目と $E_{ji}$ の $i$ 行目の内積であるから、$a_{kj}$ と一致している。特に、$AE_{ji}$ の $(i,i)$ 成分は $a_{ij}$ である。従って、$\mathrm{tr}(AE_{ji}) = a_{ij}$ である。ゆえに示すべき式の右辺は $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij} = A$ となる。