2022/5/11 配布

数学演習 IA—4 回目：転置行列、逆行列

$\boxed{1}$ A が正則行列ならば、${}^tA$ も正則行列であり、$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ であることを示せ。

$\boxed{2}$ 対称行列 A と交代行列 B に対して、$\mathrm{tr}(AB) = 0$ となることを示せ。

$\boxed{3}$ $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$ とおく。$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ と書く。$\iota(a+bi) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ によって、写像 $\iota : \mathbb{C} \to \mathcal{C}$ を定める。ここで $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ は虚数単位、$a, b \in \mathbb{R}$ としている。この時、次のような性質が成り立つ。

(1) $E^2 = E, EI = IE, I^2 = -E.$

(2) $\iota(1) = E, \iota(i) = I.$

(3) $X \in \mathcal{C}$ ならば $IX = XI$. 逆に 2 次正方行列 X が $IX = XI$ を満たせば $X \in \mathcal{C}$.

(4) $z, w \in \mathbb{C}$ に対して、$\iota(z+w) = \iota(z) + \iota(w)$.

(5) $z, w \in \mathbb{C}$ に対して、$\iota(zw) = \iota(z)\iota(w)$.

(6) $z \in \mathbb{C}$ が $z \neq 0$ を満たすとき、$\iota(\frac{1}{z}) = (\iota(z))^{-1}$.

(7) $z \in \mathbb{C}$ に対して, $\iota(\overline{z}) = {}^t(\iota(z))$.

問題：性質 (5)(6)(7) を示せ。

$\boxed{4}$ m 行 n 列の行列 A に対して、$A = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{tr}(AE_{ji})\ E_{ij}$ となることを示せ。

問題は以上。

出典または出題の狙い：

$\boxed{1}$ p25, 定理 1.4(4)。

$\boxed{2}$ p24, 練習問題 1.16。なお、A と B は同じサイズであると仮定します。

$\boxed{3}$ p27–28, 例 1.12。なお、(1)(2) はすぐわかるので略。(3) は p23, 練習問題 1.8(1)、または第 2 回の $\boxed{3}$ で解決済み。(4) は講義で証明済み。

$\boxed{4}$ p21, 例題 1.10(2) の類題。ここで E_{ij} は行列単位です [講義で紹介済みの記号]。すなわち、(i, j) 成分のみが 1 で他の全ての成分が 0 の行列です。なお、やや紛らわしいのですが、証明すべき式の E_{ij} は m 行 n 列の行列ですが、E_{ji} は n 行 m 列の行列です。

$\boxed{4}$ わからなければ、$m = 2, n = 3$ の場合に式を書いて証明してください。