2022/5/25 配布

数学演習 IA—6 回目：基本行列、基本変形

基本行列 $E_n(i;k), E_n(i,j;k), E_n(i,j)$ の記号は教科書のものを用いる。

$\boxed{1}$ $t \neq 0$ とする。基本行列の積 $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の (1,1) 成分と (2,2) 成分が 0 になるように、x, y を t で表せ。

$\boxed{2}$ $1 \leq i < j \leq n$ とする。基本行列の積

$$E_n(j;-1)E_n(i,j;1)E_n(j,i;-1)E_n(i,j;1)$$

を計算し、一つの基本行列で表せ。

$\boxed{3}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ とする。$B = P_k \cdots P_1 A Q_1 \cdots Q_l$ が $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{pmatrix}$ という形になるように、基本行列 $P_1, \ldots, P_k$, $Q_1, \ldots, Q_l$ を与えよ。

$\boxed{4}$ ２つの m 行 n 列の行列 A, B を、

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & O \\ \hline O & O \end{array}\right), \qquad B = \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline O & B_{22} \end{array}\right)$$

とブロック分けする。ここで、A_{11}, B_{11} は r 次の正方行列であり、B_{11} は正則行列であるとする。また、$A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_{21}$ は零行列であるとしている。A が行基本変形と列基本変形で B に移るとき、B_{22} も零行列であることを示せ。

問題は以上。

出典または出題の狙い：

$\boxed{1}$ p38, 練習問題 2.1 の答え (p338) に現れる行列の由来の説明。
$\boxed{2}$ p38, 練習問題 2.1.
$\boxed{3}$ 定理 2.4 の証明の前半の手続きを具体的な行列で行う練習。
$\boxed{4}$ 定理 2.4 の証明の後半の議論の応用。定理 2.5 の証明の後半 (一意性) に現れる議論も参照。行列のブロック分けの応用でもある。