2022/6/8 問題配布分

数学演習 IA 解答例—8 回目：階数、連立方程式、逆行列

$\boxed{1}$ 行列 $A=\begin{pmatrix} x-3 & 4 & -8 \\ 2 & x-1 & 4 \\ 2 & -2 & x+5 \end{pmatrix}$, ベクトル $\mathbf{b}=\begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}=\begin{pmatrix} p \\ q \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。

(1) 掃き出す方法はいろいろあるが、例えば

$$A \xrightarrow[\text{2 行めから 3 行めを引く}]{\text{1 行めに 3 行めの } -(x-3)/2 \text{ 倍を足す}} \begin{pmatrix} 0 & x+1 & * \\ 0 & x+1 & -x-1 \\ 2 & -2 & x+5 \end{pmatrix}$$

ただし、(1,3) 成分は $-8-\frac{(x-3)(x+5)}{2}=-\frac{(x+1)^2}{2}$.

$$\xrightarrow{\text{第 1 行と第 3 行を入れ替える}} \begin{pmatrix} 2 & -2 & x+5 \\ 0 & x+1 & -x-1 \\ 0 & x+1 & -\frac{1}{2}(x+1)^2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 1 行を 2 で割る}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{x+5}{2} \\ 0 & x+1 & -x-1 \\ 0 & x+1 & -\frac{1}{2}(x+1)^2 \end{pmatrix}$$

となる。この行列を後の引用のために A_2 と書く。従って、ここで $x+1$ が 0 かどうかで場合を分けるのが良い。

(a) $x+1=0$ の時。この時 $A_2=\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{x+5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である。これは列基本変形で $E_{33}(1)$ に変形できるので階数は 1.

(b) $x+1\neq 0$ の時。この時、

$$A_2 \xrightarrow[\text{つまり, } \frac{1}{x+1} \text{ を掛け算する}]{\text{第 1 行と第 2 行を } x+1 \text{ で割り算する}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{x+5}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}(x+1) \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 行に第 2 行を足す}]{\text{第 1 行から第 2 行を引く}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{x+3}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}(x-1) \end{pmatrix}$$

となる。この行列を A_3 と書く。(3,3) 成分を見て、さらに場合分けする。

(b-1) $x=1$ の時。この時、

$$A_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{x+3}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列に第 2 列を足す}]{\text{第 3 列から第 1 行の } \frac{x+3}{2} \text{ 倍を足す}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=E_{33}(2).$$

(b-2) $x\neq 1,-1$ の時。

$$A_3 \xrightarrow{\text{第 3 行を } -\frac{2}{x-1} \text{ 倍する}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{x+3}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 行に第 3 行を足す}]{\text{第 1 行から第 1 行の } \frac{x+3}{2} \text{ 倍を引く}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E_{33}(3).$$

答え：$x=-1$ の時 $\mathrm{rank}A=1$。$x=1$ の時 $\mathrm{rank}A=2$。$x\neq 1,-1$ の時 $\mathrm{rank}A=3$.

(2) $(A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 4 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ を行基本変形で $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * \end{array}\right)$ の形に変形すると、$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 5 \end{array}\right)$ となる。従って、$A^{-1}=A$.

(3) 拡大係数行列 $(A|\mathbf{b})=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & k \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 6 & 1 \end{array}\right)$ を行基本変形していく。

$$\xrightarrow[\text{第3行から第2行を引く}]{\text{第1行に第2行を足す}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & -4 & k+1 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{\text{第1行に第3行の2倍を足す}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & k+1 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

従って、解を保つためには $k+1=0$ である必要がある。逆に $k=-1$ の時、

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第3行を }-2\text{ で割る}]{\text{第2行を 2 で割る}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第1行を一番下に移動}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

最後の行列は簡約である。この時、連立一次方程式は

$$\begin{cases} x_1 & & +2x_3 & =\frac{1}{2}, \\ & x_2 & -x_3 & =0 \end{cases}$$

となるので、解は $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_3+\frac{1}{2} \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(4) 拡大係数行列 $(A|\mathbf{c})=\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 4 & -8 & p \\ 2 & -2 & 4 & q \\ 2 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right)$ を行基本変形していく。

$$\xrightarrow[\text{第2行から第3行を引く}]{\text{第1行に第3行の2倍を足す}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & p+2 \\ 0 & 0 & 0 & q-1 \\ 2 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[\text{第3行と第1行を入れ替える}]{\text{第3行を 2 で割る}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & q-1 \\ 0 & 0 & 0 & p+2 \end{array}\right)$$

第2行や第3行の表す式が解を保つためには $q=1, p=-2$ であることが必要である。逆にこの2条件が成り立つ時は、その行列は簡約な行列である。従って、第1行 $x_1-x_2+2x_3=\frac{1}{2}$ を $x_1=x_2-2x_3+\frac{1}{2}$ を変形して、解は、$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2-2x_3+\frac{1}{2} \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\boxed{2}$ (1) 第 6 回$\boxed{4}$ と同じ。$s \geq r$ と仮定して $s = r$ であることを示す。P, Q, $E_{m'n'}(s)$ も左上ブロックが r 次正方行列となるようにブロック分けする。

$$PE_{mn}(r)Q = \left(\begin{array}{c|c} P_{11} & P_{12} \\ \hline P_{21} & P_{22} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} E_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} Q_{11} & Q_{12} \\ \hline Q_{21} & Q_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} P_{11}Q_{11} & P_{11}Q_{12} \\ \hline P_{21}Q_{11} & P_{21}Q_{12} \end{array}\right),$$
$$E_{m'n'}(s) = \left(\begin{array}{c|c} E_r & O \\ \hline O & E_{m'-r,n'-r}(s-r) \end{array}\right)$$

なので、成分比較によって、

$$\begin{aligned} P_{11}Q_{11} &= E_r, \\ P_{21}Q_{11} &= O, \\ P_{21}Q_{12} &= E_{m'-r,n'-r}(s-r) \end{aligned}$$

となる。一つ目の等式に例題 2.3(p38) を用いると Q_{11} は正則行列である。2 つ目の等式に右から Q_{11}^{-1} をかけると、$P_{21} = O$ となる。これを 3 つ目の等式に代入すると、$E_{m'-r,n'-r}(s-r) = O$ となるので、1 の個数 $s - r = 0$ となる。証明終わり。

(2) $r = \mathrm{rank}A$ とする。定理 2.5 より、正則行列 R, S が存在して、$RAS = E_{mn}(r)$ である。この時、$AB = R^{-1}RASS^{-1}B = R^{-1}E_{mn}(r)S^{-1}B$ となる。従って、$P = R^{-1}, Q = S^{-1}B$ として (1) を用いると、$\mathrm{rank}AB \leq r = \mathrm{rank}A$.

$\boxed{3}$ 階数 1 の行列 $A_1, \ldots, A_r$ を用いて、$A = A_1 + \cdots + A_r$ と書けているとする。この時、$B = PA_1Q + \cdots + PA_rQ$ と書ける。定理 2.10 より $\mathrm{rank}PA_iQ = \mathrm{rank}A_i = 1$ が成り立つので、証明できた。

$\boxed{4}$ $XY = E$ を Y も同じサイズにブロック分けしてブロックごとに成分比較して解いていく。答えは
$$\left(\begin{array}{c|c|c} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} & A^{-1}BD^{-1}FG^{-1} - A^{-1}CG^{-1} \\ \hline O & D^{-1} & -D^{-1}FG^{-1} \\ \hline O & O & G^{-1} \end{array}\right).$$