2022/6/8 配布

# 数学演習 IA—8 回目：階数、連立方程式、逆行列

$\boxed{1}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} x-3 & 4 & -8 \\ 2 & x-1 & 4 \\ 2 & -2 & x+5 \end{pmatrix}$, ベクトル $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。

(1) 行列 $A$ の階数を求めよ。

(2) $x = 0$ の時の $A$ の逆行列 $A^{-1}$ を求めよ。

(3) $x$ を $A$ の階数が 2 となるような値とする。このとき、連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解を持つようにパラメータ $k$ の値を決定し、その時の解を求めよ。

(4) $x$ を $A$ の階数が 1 となるような値とする。このとき、連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ が解を持つようにパラメータ $p, q$ の値を決定し、その時の解を求めよ。

$\boxed{2}$ (1) $PE_{mn}(r)Q = E_{m'n'}(s)$ ならば $s \leq r$ であることを示せ。

(2) $\mathrm{rank}AB \leq \mathrm{rank}A$ であることを示せ。

$\boxed{3}$ $P$ を $m$ 次正則行列、$Q$ を $n$ 次正則行列とし、$m$ 行 $n$ 列の行列 $A, B$ が $B = PAQ$ を満たすとする。このとき、行列 $A$ が $r$ 個の階数 1 の行列の和として表せるならば、行列 $B$ も $r$ 個の階数 1 の行列の和として表せることを示せ。

$\boxed{4}$ ブロック分けされた行列 $X = \left(\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline O & D & F \\ \hline O & O & G \end{array}\right)$ の $A$ が 3 次正方行列、$D$ が 2 次正方行列、$G$ が 4 次正方行列であるとする。$X$ が逆行列を持つための条件を求めよ。また、この時の逆行列 $X^{-1}$ を求めよ。

問題は以上。

出典または類題：

$\boxed{1}$ (1) 例題 2.4(p44), 練習問題 2.4(p45). (2) 例題 2.6(p45), 練習問題 2.6(p45).
(3)(4) 例題 2.7(p54), 練習問題 2.9, 2.10, 2.11(p55).

$\boxed{2}$ 練習問題 2.8(1)(p46).

$\boxed{3}$ 練習問題 2.5 の一部。

$\boxed{4}$ 例題 2.5(2)(p44) の発展問題。

ヒント：

$\boxed{1}$ (1) $x$ の値によって答えが異なるので場合分けをしてください。

$\boxed{1}$ (2)(3)(4) は互いに独立した問題です。誘導問題ではありません。

$\boxed{2}$ (1) $s \geq r$ と仮定して $s = r$ を示せば良い。第 6 回の問題$\boxed{4}$ と同じようなブロック分けの議論の応用。なお、この問題では $P, Q$ は正則であるとは限っていない。

$\boxed{2}$ (2) は (1) に上手に帰着する。

$\boxed{3}$ 定理 2.10(p43) は用いて良い。ただし、いつものように、どこで使ったかに言及すること。

$\boxed{4}$ 階数とは関係なく、行列のブロック分けの計算問題。$A, D, G$ のサイズも問題に無関係です。