

実数の性質に関する補足

落合啓之 (Hiroyuki Ochiai) 九州大学 (Kyushu University)

Abstract

教科書 (黒田) の実数の性質に関する説明に補足をします。

1 背理法

まず、教科書 (黒田) p26 定理 2.1 の証明に使われている背理法について補足します。この定理は背理法で証明されています。一般に『A ならば B』を背理法で証明する時は、『A かつ「B でない」』を仮定して矛盾を導く、という筋で証明します。いくつかの証明では、両方の仮定 A と仮定「B でない」が議論に使われていて、本当に背理法が議論に必要です。しかし、別のいくつかの証明では、片方の「B でない」という仮定のみで議論が進んでいき、最後に「A でない」という結論が出てくるので、もう一方の仮定 A と矛盾する、という流れのものもあります。この後者の証明の場合は、背理法というよりも、元の命題の対偶命題『「B でない」ならば「A でない」』が証明できていることとなります。

論理的には背理法も対偶も正しい証明を与えるので等価ですが、心理的にはその 2 つの証明の間にはやや違いがあります。背理法では、ナンセンスな仮定をおくことで、最終的に矛盾を導くという話の流れですので、途中で出てくる命題や主張は全てナンセンスである可能性があります。ですから、話の中身から議論がおかしいことを見抜くことは難しく、論理が正しいかのみが頼りになります。注意深い議論が必要です。一方で対偶命題を証明する時は、普通に仮定から導かれる正しい主張のみを展開していくこととなります。従って、直感に反する主張が出てきたら、どこかで間違えたかな、と推断することができます。従って、背理法と対偶命題の両方で同じような証明ができる場合は、対偶命題に書き直して証明をする方が初学者には考えやすいでしょう。もちろん慣れてきたらどちらで書いても差し支えありません。例えば黒田先生のように、では、定理 2.1 を具材にして、実際に背理法の証明を対偶命題の証明に書き換えてみましょう。

定理 (定理 2.1). $a \geq 0$ とする。「任意の $c > 0$ に対して $a \leq c$ 」ならば「 $a = 0$ 」。

定理 (定理 2.1 の対偶). $a \geq 0$ とする。「 $a \neq 0$ 」ならば「ある $c > 0$ があって *such that* $a > c$ 」。

仮定の部分を、ちょっとまとめて書き換えると次のようになります。

定理 (定理 2.1 の対偶の言い換え). 「 $a > 0$ 」ならば「ある $c > 0$ があって *such that* $a > c$ 」。

黒田の証明の第 2 文では実際にこれを証明しています。そして、この最後の主張 (対偶の言い換え) は稠密性からすぐに従う内容なので、内容的に納得がいきやすいでしょう。正の数 a に対して、より小さい正の数 c が存在する、という命題ですから。小さい数を言うのは、後出しジャンケンが有利、と言うことです。

2 背理法 2

次に命題 2.4 の証明に現れる背理法を吟味してみます。これはちょっと気づきづらいのですが証明をじっと眺めると次のような構造になっています¹。

補題. u が条件 (U2) を満たし $u' < u$ ならば、 u' は条件 (U1) を満たさない。

対偶命題を考えると、 u が条件 (U2) を満たし、 u' が条件 (U1) を満たせば、 $u' \geq u$ となる。

従って、 u, u' がどちらも条件 (U1)(U2) を満たせば、 $u' \geq u$ かつ $u \geq u'$ となります。従って $u' = u$ です。これで命題 2.4 「 u, u' がともに A の上限ならば $u = u'$ 」の証明ができました。

Proof. (補題の証明。) 教科書の証明を今の場合に合うように²書き直します。 u が条件 (U2) を満たすので、「 $\exists x \in A$ such that $u' < x$ 」。これの否定命題を考えると「 $\forall x \in A, u' \geq x$ 」、すなわち「 u' は (U1) を満たす」となるので、「 u' は条件 (U1) を満たさない」ことが示せた。□

3 下界、下限

索引 (p431) を見ると【ケ】のところではなく【カ】のところにあるので、読み方は「かかい」「かげん」です。教科書では、先に下限 (p33) が出てきて、後に下界 (p38) が出てきますが、新しい概念を少しずつ導入するとしたらそれとは逆の順序の方が理解しやすいでしょう。

定義 (定義 2.5). 集合 $A \subset \mathbb{R}$ と実数 $b \in \mathbb{R}$ が、条件

$$\forall a \in A, a \leq b.$$

を満たすとき、「 b は A の上界である」という。

定義 (定義 2.3). 集合 $A \subset \mathbb{R}$ と実数 $u \in \mathbb{R}$ が、条件 (U1)(U2) を満たすとき、「 u は A の上限である」という。

それで (U1) を見直すと、これは

(U1') u は A の上界である。

を言い直したものに過ぎないことがわかります。ここまでは、気づきやすいでしょう。当たり前でないのは次の (U2) です。まず (U2) をそのまま書くと

(U2) $u' < u$ ならば、「 $\exists x \in A$ such that $u' < x$ 」。

です。この「...」の否定命題を書くと、「 $\forall x \in A, u' \geq x$ 」となります。それは「 u' は A の上界である」という命題そのものです。ということは (U2) は

(U2') $u' < u$ ならば「 u' は A の上界ではない」。

となっています。すなわち、条件 (U1) も (U2) も、「上界」という用語あるいは概念を使うと短く書き表わせることがわかりました。以上をまとめると、

¹なっていることに自分で気がつくのは難しいかもしれませんが。以下の説明を理解するためには、教科書の説明とここの説明が同じであることを理解することは不要です。ですから、「気がつ」かなくても大丈夫です。

²教科書では (U2) の設定では $u' < u$ となっているのに対して、命題 2.4 の証明では $u < u'$ という逆の設定を扱っています。論理的にはどのような記号を使ってもいいのですが、こういうところで記号を揃えた置かないと初学者は混乱します。ここでは定義 2.3 の条件 (U2) と命題 2.4 の証明での記号を揃えるように変更もします。

定義 (定義 2.3'). 集合 $A \subset \mathbb{R}$ と実数 $u \in \mathbb{R}$ が, 条件 $(U1')(U2')$ を満たすとき、「 u は A の上限である」という。

さて、さらに書き換えてみましょう。条件 $(U1')(U2')$ は最小値の定義と直結しています。すなわち、上界のうち最小のものが上界です。これを説明して行きます。教科書では定理 2.5 の途中で

$$U(A) := \{b \in \mathbb{R} \mid b \text{ は } A \text{ の上界である}\}$$

という記号を導入しています。この記号を便利に使うと、

$$(U1'') \quad u \in U(A).$$

$$(U2'') \quad u' < u \text{ ならば } u' \notin U(A).$$

となります。この2条件を言い換えると $(-\infty, u] \cap U(A) = \{u\}$ となります。定義の「言葉遣いだけの言い換え」はここまでです。ここから、さらに、内容的な事実を踏み込んで議論してみましょう。それは、定理 2.5 の直前に書いてある事実です、それを補題としてまとめます。

補題. $b \in U(A)$, $b' > b$ ならば $b' \in U(A)$.

特に $b \in U(A)$ ならば $[b, \infty) \subset U(A)$.

この補題と $(U1'')$ より $[u, \infty) \subset U(A)$ がわかります。一方で $(U2'')$ より $(-\infty, u) \cap U(A) = \emptyset$ なので、その2つを合わせると、 $U(A) = [u, \infty)$ となります。すなわち、「上限の定義」を次のように言い換えることもできました。

定義 (定義 2.3''). 集合 $A \subset \mathbb{R}$ と実数 $u \in \mathbb{R}$ が, 条件 $U(A) = [u, \infty)$ を満たすとき、「 u は A の上限である」という。

まとめると、教科書では定義 2.3, 2.4, 2.5 の順に議論されていますが、定義 2.5 を先にやって、定義 2.5 を用いて定義 2.3, 2.4 を説明した方が small step で議論することになります。どちらの論法がわかりやすいかは読者に依存しています。

4 アフィン変換

$n \neq 0$ と m に対して $f(x) = n(x+m)$ という一次式で定まる写像をアフィン変換といいます。 $+m$ は数直線全体を右にシフトする移動を表し、 $n \times$ は数直線全体を m 倍に拡大する操作を表しています。

定理 2.4(i) の証明を鑑賞してみましょう。まず、定理の主張を書きます。

定理 (定理 2.4(i)). $a, b \in \mathbb{R}$ such that $a < b$ ならば、 $\exists r \in \mathbb{Q}$ such that $a < r < b$.

証明の前半は次のような流れです。十分右にシフトすれば、 a, b は正の数になる。十分拡大すれば a, b の間隔は 1 以上離れる。これを論理記号を使って書くと、

$$\text{「}\exists m, n \in \mathbb{N} \text{ such that } n \neq 0 \text{ and } n(a+m) > 0 \text{ and } n(b+m) - n(a+m) > 1.\text{」}$$

そこで $A = n(a+m)$, $B = n(b+m)$ と置きましょう。証明の後半は次のようになります。

定理 (2.4(i)'). $A, B \in \mathbb{R}$ such that $A > 0$ かつ $B - A > 1$ ならば、 $\exists p \in \mathbb{N}$ such that $A < p < B$.

そして、最後に $p = n(r + m)$ となるように r を定めます、すなわち、 $r = \frac{p}{n} - m$ とすれば r は有理数であり、 $a < r < b$ となりますので定理 2.4(i) が証明できました。

m, n, p の選び方に関しては教科書では説明の濃淡があります。 m に関しては具体的な説明がありませんが、 n に関しては系 2.2 を用いた説明を与えてあり、 p に関しては、「 A より大きな自然数のうち最小のもの」という具体的な取り方を指定しています。しかし、 m の取り方も証明しようと思ったら、事実上、系 2.1 を使うことになります。詳述してみましょう。

Proof. [m の取り方。] a の正負で 2 つに場合分けして示す。

- $a \geq 0$ であれば、 $m = 1$ とすれば $a + m > 0$ である。
- $a < 0$ であれば、 $-a > 0$ なので、系 2.1 より、 $\exists m \in \mathbb{N}$ such that $m > -a$ 。従って、 $a + m > 0$ である。

□

最後になぜアフィン変換を使うとうまく行ったのか、をまとめておくことにしましょう。ここで使ったアフィン変換 f の性質は、

- 全単射である。
- 順序を保つ： $x < y$ ならば $f(x) < f(y)$ 。
- m, n が有理数ならば、写像 f は有理数を有理数に移す。

でした。これらの効果によって、元の問題 (a, b に対して r を見つける) がより易しい問題 (A, B に対して p を見つける) に還元されていることになります。この還元 (reduction) という技法は証明の見通しをよくする基本的な道具の一つで、高校ではあまり学習しませんが、効果的に使えれば証明の流れを格段に見やすく書くことができるようになります。