数学演習後期第１回＝線形代数後期第１回：解答例

10/7 解説

狙い：一次独立、一次従属の理解。

$\boxed{1}$ 問題 4.2(7) を解け。(証明を与えよ。)：ビデオ参照。

$\boxed{2}$ Old version: $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2,\ \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3,\ \mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_1,\ \mathbf{u}_4 = \mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_1$ と定義する。

(a)：偽。特に何も仮定していないので一次独立にできる。$\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1,\ \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2,\ \mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_3,\ \mathbf{v}_4 = \mathbf{e}_4$ とすると一次独立になる。ただし、$\mathbf{e}_i$ は 4.1 節の基本ベクトルである。

(b)(c)：偽。(a) の反例が (b)(c) の反例にもなる。(a) で選んだ一次独立なベクトルの部分集合なので一次独立である。

(d)(k)：真。証明はビデオを参照してください。

(e)(f)：真。(d) が正しいのでその部分集合は一次独立である。

(g)：偽。$\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ という選択をして反例を作ることを考えてみよう。$\mathbf{v} = \mathbf{e}_1,\ \mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_2,\ \mathbf{v}_4 = \mathbf{e}_3$ とすると、$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4$ は一次独立である。一方で、$\mathbf{v}_2$ は一次従属であるので、それを含む $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4$ は一次従属である。したがって反例となる。

(h)=(i)：偽。$\mathbf{v}_3$ が絡んでいないことに着目する。まず、$\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1, \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2, \mathbf{v}_4 = \mathbf{e}_3$ と一次独立にとる。一方で、$\mathbf{v}_3 = -\mathbf{e}_2$ と選べば $\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$ となるので、$\mathbf{u}_2$ は一次従属である。それを含む $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4$ も一次従属である。

(j)：偽。(h) の反例が (j) の反例にもなる。$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_4$ は, (h) で選んだベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4$ を含む集合なので一次従属である。

$\boxed{2}$ 正しくは、$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2,\ \mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3,\ \mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_1,\ \mathbf{v}_4 = \mathbf{u}_4 - \mathbf{u}_1$ と定義する。

(d)(k)：真。証明はビデオを参照してください。

(a)：偽。(d) が真なので、$\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1, \mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_2, \mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_3, \mathbf{u}_4 = \mathbf{e}_4$ の時に反例となる。ただし、この時に結論「$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ は一次独立」であることは自明にわかることではなくて、証明する必要があります。これは、(d) で行っています。

(b)(c)：偽。(a) の反例が (b)(c) の反例にもなる。(a) で選んだ一次独立なベクトルの部分集合なので一次独立である。

(e)(f)：真。(d) が正しいのでその部分集合は一次独立である。

(g) : 偽。$\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1, \mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_2, \mathbf{u}_4 = \mathbf{e}_3$ を一次独立に選んで、$\mathbf{u}_3$ で調節します。$\mathbf{u}_3 = -\mathbf{e}_2$ と選べば $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ なので、$\mathbf{v}_2$ は一次従属となるので、それを含む $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4$ も一次従属です。

(h)=(i) : 偽。$\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$ という中で反例を探してみよう。$\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1, \mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_2, \mathbf{u}_4 = \mathbf{e}_3$ とすると、$\mathbf{u}_2$ が一次従属なので、$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4$ が一次従属である。一方で、$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4$ が一次独立であることを示せる。

(j) : 偽。(h) の反例が (j) の反例にもなる。