(a) 固有多項式 $=(t+1)(t-1)(t-2)$

固有値 $-1, 1, 2$

$W(-1;A)=\left\langle\begin{pmatrix}-5\\2\\3\end{pmatrix}\right\rangle$

$W(1;A)=\left\langle\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$

$W(2;A)=\left\langle\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}\right\rangle$

(b) $P=\begin{pmatrix}-5&-1&-3\\2&1&1\\3&1&2\end{pmatrix}$ とすると

$P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&-2\\1&1&1\\1&-2&3\end{pmatrix}$.

なお $P=\begin{pmatrix}-1&-\frac{5}{3}&-\frac{3}{2}\\1&\frac{2}{3}&\frac{1}{2}\\1&1&1\end{pmatrix}$ とすると

$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-3&3&-6\\2&-4&6\end{pmatrix}$ となる。

固有ベクトルのスカラー倍の取り方や、固有ベクトルによって、PやP^{-1}は変更されるが、どれも正解。

この場合は $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ となる

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =: B \text{ とする。}$$

(c) $A = PBP^{-1}$

$$A^n = PB^nP^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 5\cdot(-1)^n - 1 - 3\cdot 2^n & -5\cdot(-1)^n - 1 + 6\cdot 2^n & 10(-1)^n - 1 - 9\cdot 2^n \\ -2(-1)^n + 1 + 2^n & 2(-1)^n + 1 - 2\cdot 2^n & -4(-1)^n + 1 + 3\cdot 2^n \\ -3(-1)^n + 1 + 2\cdot 2^n & 3(-1)^n + 1 - 4\cdot 2^n & -6(-1)^n + 1 + 6\cdot 2^n \end{pmatrix}$$

(d) $$\exp A = \begin{pmatrix} 5e^{-1} - e - 3e^2 & -5e^{-1} - e + 6e^2 & 10e^{-1} - e - 9e^2 \\ -2e^{-1} + e + e^2 & 2e^{-1} + e - 2e^2 & -4e^{-1} + e + 3e^2 \\ -3e^{-1} + e + 2e^2 & 3e^{-1} + e - 4e^2 & -6e^{-1} + e + 6e \end{pmatrix}$$

(e) $$P_1 = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 10 \\ -2 & 2 & -4 \\ -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -9 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

なお（答案には使わないけど）

$$
\begin{cases}
P_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\[2ex]
P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\[2ex]
P_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
P = \left(\begin{array}{c|c|c} -5 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \\[2ex]
P^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} -1 & 1 & -2 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 3 \end{array}\right)
\end{cases}
$$

となっているのは偶然ではありません。