数学演習 (第 2 回＝線形代数第 1 回)：解答例

5/20 出題, 5/26 提出締切, 5/27 解説

$\boxed{1}$ 教科書の p195. $A = {}^tA = -A$. 従って $2A = O$. 従って $A = O$. 証明終わり。

成分を使った別解：A が対称行列なので $a_{ij} = a_{ji}$ である。A が交代行列なので $a_{ij} = -a_{ji}$ である。2 つの式を足し合わせて、$2a_{ij} = 0$ となる。従って、$a_{ij} = 0$ がすべての i, j について成り立つ。これは $A = O$ を意味している。証明終わり。

$\boxed{2}$ (1) $B = cA$ とする。$b_{ij} = ca_{ij}$ である。$i > j$ の時に $a_{ij} = 0$ なので $b_{ij} = 0$ である。従って、B は上三角行列である。

(2) 教科書 p196. $C = A + B$ とする。$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ である。$i > j$ の時に $a_{ij} = 0$ かつ $b_{ij} = 0$ なので、$c_{ij} = 0$ である。従って、C は上三角行列である。

(3) 解説：$C = AB$ とする。

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

である。$i > j$ であるときに $a_{ij} = 0$ であることに着目し、j の動く範囲を $j < i$ と $j \geq i$ の 2 つに分ける。

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} b_{jk} + \sum_{j=i}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

ここで $i > k$ と仮定して、$c_{ik} = 0$ を示したい。第 1 項では $a_{ij} = 0$ なので, 第 1 項は 0 を足し合わせることになり 0 になる。第 2 項では $j \geq i > k$ であることに気がつくと、$b_{jk} = 0$ であることから、やはり 0 を足し合わせることになり、第 2 項も 0 になる。従って、$c_{ik} = 0$ となることが示せた。

別解：j の動く範囲を $j \leq k$ と $k + 1 \geq i$ の 2 つに分けるというのも良い。

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} b_{jk} + \sum_{j=k+1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

あとは同じ。

$\boxed{3}$ (1) $P^{-1} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$

(2) $C = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{3} \end{pmatrix}.$

(3) $C^n = \begin{pmatrix} (2-\sqrt{3})^n & 0 \\ 0 & (2+\sqrt{3})^n \end{pmatrix}$

(4) $PCP^{-1} = A.$

(5) まず、編み物のマフラーがほどけるような感じで、

$$\begin{aligned} A^n &= (PCP^{-1})^n \\ &= \underbrace{(PCP^{-1})(PCP^{-1})\cdots(PCP^{-1})}_{n\text{ 個}} \\ &= P\,\underbrace{C(P^{-1}P)C\cdots C(P^{-1}P)C}_{C\text{ が }n\text{ 個}}\,P^{-1} \\ &= PC^nP^{-1} \end{aligned}$$

となる。これに P, C^n, P^{-1} の具体形を代入すると、

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (2-\sqrt{3})^n & 0 \\ 0 & (2+\sqrt{3})^n \end{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}((2-\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^n) & \frac{\sqrt{3}}{2}((2-\sqrt{3})^n - (2+\sqrt{3})^n) \\ \frac{1}{2\sqrt{3}}((2-\sqrt{3})^n - (2+\sqrt{3})^n) & \frac{1}{2}((2-\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^n) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(5) の計算結果の検算 : $n = 1$ の時に A になることを確認する。$n = 0$ の時に E になることを確認する。

なお、この表示式では A^n の成分が整数であることは瞬時には見えづらい。