数学演習 (第 4 回＝線形代数第 2 回)：解答例

6/3 出題, 6/9 提出締切, 6/10 解説

$\boxed{1}$ (1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & -6 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ (2) $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & -6 & 1 & 4 & 7 & 1 \end{array}\right)$.

(3)(4) 簡約化します。途中経過を知りたい人はビデオを参照してください。結果だけ書くと、拡大係数行列の簡約化は、$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. 従って、係数行列の主成分は (1,1), (2,3) 成分の 2 カ所で、係数行列の階数は 2。拡大係数行列の主成分は (1,1), (2,3), (3,6) 成分の 3 カ所で、係数行列の階数は 3。

$\boxed{2}$ 答えは教科書にあります。p198。途中経過を知りたい人はビデオを参照してください。

$\boxed{3}$ 解答の仕方はいくつもあります。解答 2 以降の色々な解法についてはビデオを参照してください。

解答 1 : 対偶命題を書く。「rank $A =$ rank B ならば rank $C =$ rank D」を示そう。$A = (B|\mathbf{e})$ と書く。$C = (D|\mathbf{f})$ と書く。

定理 2.3.1 を用いると、示すべき命題は次のように言い換えられる。「連立 1 次方程式 $B\mathbf{x} = \mathbf{e}$ が解を持つならば、連立 1 次方程式 $D\mathbf{x} = \mathbf{f}$ が解を持つ」。$\mathbf{x}$ が $B\mathbf{x} = \mathbf{e}$ を満たせば、その連立 1 次方程式 m 本のうち、最後の 1 本を除く $m-1$ 本を書いたものが $D\mathbf{x} = \mathbf{f}$ であるから、$\mathbf{x}$ は $D\mathbf{x} = \mathbf{f}$ を満たしている。証明終わり。

解答 2 :「C の簡約化が $[00\ldots001]$ という行を含めば、A の簡約化も $[00\ldots001]$ という行を含む」という主張を経由する方法。ビデオを見てください。

解答 3 :「C の簡約化を C' とする。$A = \begin{pmatrix} C \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix}$ の簡約化は、$A_2 = \begin{pmatrix} C' \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix}$ を簡約化したものと等しい」という事実を使って示す。ビデオを見てください。

解答 4 : 可能な数字の取り合わせをあらかじめ精査する方法。記号を $a :=$ rank $A, b =$ rank $B, c =$ rank $C, d =$ rank D とする。示すべき命題は「$c > d$ ならば $a > b$ 」である。ここで、「$a = b$ または $a = b+1$ 」であり、「 $c = d$ または $c = d+1$ 」である。従って、示すべき命題は「$c = d+1$ ならば $a > b$」と同値である。さらに「 $a = c$ また $a = c+1$」であり、「$b = d$ または $b = d+1$」でもあるので、「$a = c+1$ または $b = d$」 の場合は、仮定

$c = d + 1$ から目的の $a > b$ が従う。従って、議論となるのは、「$a = c$ かつ $b = d + 1$」の場合であって、それは実際には起こらないことを証明することがポイントとなる。繰り返すと、この方向性で証明する場合は、「$\mathrm{rank}\ A = \mathrm{rank}\ B = \mathrm{rank}\ C > \mathrm{rank}\ D$ とはならない」ということを示すところがもっとも鍵になるステップである。