数学演習 (第 6 回＝線形代数第 3 回)：解答例

6/17 出題, 6/23 提出締切, 6/24 解説

$\boxed{1}$ (1) $A-3E=\begin{pmatrix}4&4&8&8\\1&1&2&2\\3&0&3&4\\-6&-3&-9&-10\end{pmatrix}$, $A-2E=\begin{pmatrix}5&4&8&8\\1&2&2&2\\3&0&4&4\\-6&-3&-9&-9\end{pmatrix}$.

(2) 連立 1 次方程式の拡大係数行列は $\begin{pmatrix}4&4&8&8&0\\1&1&2&2&0\\3&0&3&4&0\\-6&-3&-9&-10&0\end{pmatrix}$ である。これを簡約化した行列は、$\begin{pmatrix}1&0&1&\frac{4}{3}&0\\0&1&1&\frac{2}{3}&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ である (答案には途中の計算が必要)。従って、解は、$\mathbf{x}=c_3\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_4\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\-\frac{2}{3}\\0\\1\end{pmatrix}$ となる。

(3) 連立 1 次方程式の拡大係数行列は $\begin{pmatrix}5&4&8&8&0\\1&2&2&2&0\\3&0&4&4&0\\-6&-3&-9&-9&0\end{pmatrix}$ である。これを簡約化した行列は、$\begin{pmatrix}1&0&\frac{4}{3}&\frac{4}{3}&0\\0&1&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ である (答案には途中の計算が必要)。従って、解は、$\mathbf{x}=c_3\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\-\frac{1}{3}\\1\\0\end{pmatrix}+c_4\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\-\frac{1}{3}\\0\\1\end{pmatrix}$ となる。

- $$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  なので、

  $$P = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \\ -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4) 逆行列を求めるために

$$[P|E] = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を簡約化して行くと (答案には途中の計算が必要)、答えは

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & -3 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 3 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

となる。したがって

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 4 \\ -6 & -3 & -9 & -9 \\ -3 & 0 & -3 & -4 \\ 6 & 3 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

となる。

(5) 今までに求めた P, P^{-1} と A を用いて行列の積を直接計算すると (答案には途中の計算が必要)、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

もし要領よくやろうとしたら、

$$
\begin{aligned}
AP &= A\begin{pmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_4\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}A\mathbf{u}_1 & A\mathbf{u}_2 & A\mathbf{u}_3 & A\mathbf{u}_4\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}3\mathbf{u}_1 & 3\mathbf{u}_2 & 2\mathbf{u}_3 & 2\mathbf{u}_4\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix} \\
&= P\begin{pmatrix}3&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

この等式の両辺に左から P^{-1} をかけて、結論を得る。とすると、行列計算は不要。なお、２行目から３行目の等式では次のような計算結果を用いている。

$$
\begin{aligned}
(A-3E)\mathbf{u}_1 &= \mathbf{0}, \\
A\mathbf{u}_1 - 3E\mathbf{u}_1 &= \mathbf{0}, \\
A\mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_1 &= \mathbf{0}, \\
A\mathbf{u}_1 &= 3\mathbf{u}_1.
\end{aligned}
$$

コメント：結果の数値が正しくない場合、途中の計算が省略されていて書かれていないと、

(i) 理論的に誤っているのか、

(ii) やり方が正しくないのか、

(iii) 計算ミスか、あるいは、

(iv) 写し違いなのかが、

読み手にはわからないので、添削指導ができません。どこでどう誤ったかによって、気をつけてもらうポイントが変わってくるのです。

背景：5.4 節、行列の対角化。例題 5.4.2 から題材をとりました。どうして、最初の (1) で A から $A-3E$ や $A-2E$ に気がつくか、ということろ（固有値 3 と 2 である）の説明はもちろんまだしていませんが、その他の計算は現時点で全てできることになります。

$\boxed{2}$ 答え：$n=4k, 4k+1$ の時は $\mathrm{sgn}(\sigma)=+1$。$n=4k+2, 4k+3$ の時は $\mathrm{sgn}(\sigma)=-1$。

証明：$n=2m$ の時。

$\sigma=(1\ 2m)(2\ 2m-1)\cdots(m-1\ m+2)(m\ m+1)$. したがって、$\mathrm{sgn}(\sigma)=(-1)^m$.

$n = 2m+1$ の時。
$\sigma = (1\ 2m+1)(2\ 2m)\cdots(m-1\ m+3)(m\ m+2)$. したがって、$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^m$.
証明終わり。

発展：σ の転倒数 $l(\sigma)$ を計算し、それを用いて $\mathrm{sgn}(\sigma)$ を計算して、上の結果と一致することを確認してみよう。

背景：σ は、A 型 Coxeter 群の最長元。