

数学演習第 11 回 = 線形代数第 5 回

7/21 提出締切, 7/22 解説

狙い : 余因子行列の性質。文字を成分とする特別な形の行列式の計算練習。

- 1 A のすべての成分が整数であり、 $\det A = 1$ であるとする。

この時、 A^{-1} のすべての成分は整数であることを示せ。

- 2 AB の余因子行列は $\tilde{B}\tilde{A}$ であることを示せ。

ただし、 A の余因子行列を \tilde{A} と書き、 B の余因子行列を \tilde{B} と書いている。

- 3 次の 4 つの行列 A, B, C, D の行列式を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} a & a^2 & b+c \\ b & b^2 & c+a \\ c & c^2 & a+b \end{pmatrix}, \quad B = xE - Z, \text{ ただし } Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ c_6 & c_5 & c_4 & c_3 & c_2 & c_1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} x & a & b & c & d \\ a & x & b & c & d \\ a & b & x & c & d \\ a & b & c & x & d \\ a & b & c & d & x \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1! & 2! & 3! & 4! \\ 2! & 3! & 4! & 5! \\ 3! & 4! & 5! & 6! \\ 4! & 5! & 6! & 7! \end{pmatrix}.$$

問題は以上です。

- 3 B の定義に現れる E は単位行列です。サイズは Z と引き算できることから一通りに定まります。
- 前回と同じく途中の計算を必ず書いてください。
- 前回のレポートと同じく、今までに習ったことや 3.4 節, 3.5 節だけでなく、それ以降の節や章で習うことや、この教科書に書かれていない公式や、追加プリントで学習したことや、これまでの数学演習レポート問題で学習したことなど、何を使っても良いです。ただし、どのような公式や事実や定理を使ったかを、公式自体を書くとか、定理番号やページ数を書くなど、答案ではっきりさせてください。

- $\boxed{3}$ $\det D$ の答えは整数ですが、答えの数値が大きくなるので、数字にせずに階乗の記号が残ったままの積の形で答えて OK です。ただし、答えには「足す」や「引く」を使って表示しては、いけません。
- $\boxed{3}$ $\det B$ の計算で、例題 3.5.2 を「使う」場合には、 a_0, a_1, \dots や n が何なのかを、曖昧ではなく明白に書きましょう。
- なお、例題 3.5.2 と「同様に」とだけ書いて証明や計算を書かないのは、出題者に「俺は答えねえぞ」ってケンカを売っているようにも聞こえるので、やめた方が平穏です。
- もちろん、同様に、と書いて、証明や計算を書くのは OK です。
- なお、例題 3.5.2 を使うことを勧めているわけではありません。使った場合に想定されるトラブルをあらかじめケアしているだけです。気にしないように。
- 特に何ちゃらポイントがもらえるわけではありませんが、 B, C, D で、それぞれサイズを 6, 5, 4 に限定せずに、一般のサイズの行列の場合に、答案を書くことも歓迎します。（その方が、ある意味、答案が読みやすくて、私の方も採点が楽です。）