数列と関数の極限

落合啓之 (Hiroyuki Ochiai)

九州大学 (Kyushu University)

Abstract

ε-N 論法を使って数列の和や積の極限の話を学習した時の総復習。
どこで ε-N 論法を使って、どこは使わなくて良いのかを細かく分けて説明する。

はじめに

この文章を例年のように講義で使うのではなくて、配布資料とするため、2020.5 月に私の考え方や使い方をここに加筆しました。

- 想定されている読者は、一度、大学 1 年生の流儀で、数列の極限や関数の極限を学習した学生です。全ての定義や命題や証明を書きましたので、まだ、数列の極限や関数の極限を学習していない学生も読めなくはありませんが、その段階では、ここのノートにあるような記述様式の意味やご利益がわかりづらいかもしれません。
- このノートの目標は、収束列の和や積や商も収束する、という定理の定義に基づく証明です。
- この文章の背景にある考え方は、シリーズ : 数学セミナー増刊「大学数学の質問箱」に私が書いた「ε-δ がわかりません」という記事に詳しく書きました。興味がある学生さんはその文章も見てください。
- この文章では、通常の ε-N 論法の説明とは異なり、ε の意味には触れません。逆に、意味を全く考えずに、定義の言い換えと 3 段論法のみで全てを証明して行きます。それがこの文章の最大の特徴です。わかりやすいか、逆にわかりづらいかは、人によってまちまちです。このノートの説明がわかりづらくても気にしないように。
- しかも証明はとても細かく細切りにしてあって、各行における証明は今まで学習したことの単純な組み合わせだけで導けるように構成しています。従って、一つ一つのステップは非常に退屈です。ハイキングにたとえると、通常の説明は山の上の方を見ながら上を向いて歩くことに当たり、ここでの説明は、一歩一歩足元を見て歩くことに相当します。草原のように見晴らしのいいところでは上を向いて歩くほうが良いのですが、足場が悪くしかも見通しが利かない場所では下を向いて進む、つまり、直感を信じるのではなく論理を駆使して証明するほうが容易いと言えるでしょう。実は、尾根に出て後ろを振り返れば（全部証明が終わった後で意味を考えれば)、今までの行程を理解することも可能です。
- なお、全称記号 $\forall, \exists$ は自在に使います。全称記号の入った命題の否定命題なども自在に使います。
- また、実数の性質は使いません。例えば上限公理やアルキメデスには触れていません。それよりも前のところの学習内容です。

Contents

1 関数の連続性 **3**

2 数列の 0 への収束 **3**

3 ２つの数列を１つにまとめる技術 **4**

4 0 でない極限値への収束 **5**

5 順序関係は極限で保たれる **6**

6 補足 **6**

7 このノートで扱っていない話題 **6**

8 0 への収束 **7**

9 ２つの関数を１つにまとめる技術 **7**

10 0 でない極限値への収束 **8**

11 順序関係は極限で保たれる **8**

1　関数の連続性

関数の定義域における一点 $x=0$ における連続性の定義[1]から始めよう。

定義 1.1. 「$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ |\forall x|<\delta$ に対して $|f(x)|<\varepsilon$」が成り立つ時 $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ と定義する。

3 つの関数 $f(x)=rx,\ x^2,\ \dfrac{x}{1-x}$ の場合を考える。

補題 1.2. 実数 r を固定する。この時 $\lim_{x\to 0} rx=0$.

Proof. r が 0 かどうかで場合分けするのが簡明である。

- $r=0$ の時。この時 $f(x)=0$ なので、どんな δ でも結論 $|f(x)|<\varepsilon$ が成り立つ。
- $r\neq 0$ の時。$\delta=\dfrac{\varepsilon}{|r|}$ とすれば良い。

□

補題 1.3. $\lim_{x\to 0} x^2=0$.

Proof. $\delta=\min(1,\varepsilon)$ とすれば良い。$\min(1,\varepsilon^2)\leq\varepsilon$ が成り立つことに着目すると、$x^2<\delta^2=\min(1,\varepsilon^2)\leq\varepsilon$ が確認できる。□

補題 1.4. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{1-x}=0$.

Proof. $\delta=\dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ とすれば良い。詳しく計算を書くと、$-\delta<x<\delta$ ならば $f(-\delta)<f(x)<f(\delta)$ であることと、$f(\delta)=\varepsilon,\ f(-\delta)=\dfrac{-\varepsilon}{1+2\varepsilon}\geq-\varepsilon$ であることから、$-\varepsilon<f(x)<\varepsilon$ である。□

2　数列の 0 への収束

定義 2.1. 「$\forall\varepsilon>0,\ \exists N,\ \forall n>N$ に対して $|a_n|<\varepsilon$」が成り立つ時 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ と定義する。

補題 2.2. $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ かつ $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ ならば $\lim_{n\to\infty} f(a_n)=0$.

Proof. 定義 1.1 より、「$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ |\forall x|<\delta$ に対して $|f(x)|<\varepsilon$」。δ に対して、定義 2.1 より、「$\exists N,\ \forall n>N$ に対して $|a_n|<\delta$」。したがって $x=a_n$ とすることができて、$|f(a_n)|<\varepsilon$. □

第 1 節で示した 3 つの関数の例と合わせて、次の 3 つの場合に応用できる。

補題 2.3. 実数 r を固定する。この時、$\lim_{n\to\infty} ra_n=0$.

補題 2.4. $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ ならば $\lim_{n\to\infty} a_n^2=0$.

補題 2.5. $\lim_{n\to\infty} a_n=0.$ ならば $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{1-a_n}=0$.

[1] このノートでは区間 $[a,b]$ における連続性の話は出てきません。

3　2つの数列を1つにまとめる技術

補題 3.1.（はさみうち）$|y_n| \le x_n$ だとする。$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ならば $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$.

Proof. 定義 2.1 から $|y_n| \le x_n < \varepsilon$ が従う。 □

補題 3.2. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ かつ $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ ならば $\lim_{n\to\infty} \max(|a_n|, |b_n|) = 0$.

Proof. 定義 2.1 から、$\forall\varepsilon > 0$,
$\exists N_1, \forall n > N_1$ に対して $|a_n| < \varepsilon$ かつ
$\exists N_2, \forall n > N_2$ に対して $|b_n| < \varepsilon$ となる。$N := \max(N_1, N_2)$ と定義する。この時、
$\forall n > N$ に対して、$\max(|a_n|, |b_n|) < \varepsilon$ である。 □

以下では ε-N 論法に戻ることなく、補題の組み合わせだけで証明する。

補題 3.3. 2つの実数 a, b に対して、$|a + b| \le 2\max(|a|, |b|)$.

Proof. $|a + b| \le |a| + |b| \le \max(2|a|, 2|b|) = 2\max(|a|, |b|)$. □

補題 3.4. 2つの実数 a, b に対して、$|ab| \le \max(|a|, |b|)^2$.

Proof. $|ab| = |a|\,|b| \le \max(a^2, b^2) = \max(|a|, |b|)^2$. □

以上の2つは数列とは直接関係ない数の性質。

補題 3.5. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ かつ $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ ならば、$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = 0$.

Proof. 記号の簡単のため $c_n = \max(|a_n|, |b_n|)$ と定める。
補題 3.2 より $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$.
補題 2.3 の $r = 2$ の時より $\lim_{n\to\infty} 2c_n = 0$.
補題 3.3 より $|a_n + b_n| \le 2c_n$.
補題 3.1 より $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = 0$. □

補題 3.6. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ かつ $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ ならば、$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = 0$.

Proof. 記号の簡単のため $c_n = \max(|a_n|, |b_n|)$ と定める。
補題 3.2 より $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$.
補題 2.4 より $\lim_{n\to\infty} c_n^2 = 0$.
補題 3.4 より $|a_n b_n| \le c_n^2$.
補題 3.1 より $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = 0$. □

4　0 でない極限値への収束

この節では ε-N 論法に戻ることなく、補題の組み合わせだけで証明する。

定義 4.1. A を実数とする。$\lim_{n\to\infty}(a_n - A) = 0$ の時、$\lim_{n\to\infty} a_n = A$ であると定義する。

補題 4.2. $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ かつ $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ の時、$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$ である。

Proof. $(a_n + b_n) - (A + B) = (a_n - A) + (b_n - B)$ なので、定義 4.1 と補題 3.5 から従う。 □

補題 4.3. $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ かつ $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ の時、$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = AB$ である。

Proof. $x_n = a_n - A$, $y_n = b_n - B$ と定義する。仮定は $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ かつ $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ と同値である。

$$a_n b_n - AB = (x_n + A)(y_n + B) - AB = Ay_n + Bx_n + x_n y_n$$

を動機とする。補題 2.3 より $\lim_{n\to\infty} Ay_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} Bx_n = 0$ であり、補題 3.6 より $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$ である。したがって、補題 3.5 より $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n - AB) = 0$ であり、定義 4.1 より $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = AB$ である。 □

補題 4.4. $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ ならば $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 1$.

Proof. $x_n = 1 - a_n$ とする。仮定は $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ と同値である。補題2.5より $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{1 - x_n} = 0$ である。$\frac{1}{a_n} - 1 = -\frac{x_n}{1 - x_n}$ なので、補題 2.3 を $r = -1$ に適用して $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} - 1 = 0$ である。したがって、定義 4.1 より $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 1$. □

補題 4.5. $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ で、$A \neq 0$ ならば $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{A}$.

Proof. $x_n = \frac{a_n}{A}$ とする。補題 4.3 より $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$. 補題 4.4 より $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 1$. 補題 4.3 より $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{A}\frac{1}{x_n} = \frac{1}{A} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{A}$. □

補題 4.6. $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ で、$A \neq 0$ ならば $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{B}{A}$.

Proof. 補題 4.5 と補題 4.3. □

5 順序関係は極限で保たれる

補題 5.1. $c > 0$ ならば 「$\exists \varepsilon > 0$ *such that* $c \geq \varepsilon$」。

Proof. $\varepsilon = c$. $\square$

補題 5.2. 実数 c が、条件「$\forall \varepsilon > 0, c < \varepsilon$」を満たすならば、 $c \leq 0$.

Proof. 補題 5.1 の対偶。 $\square$

補題 5.3. $x_n \geq c$ かつ $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ならば $c \leq 0$.

Proof. $c \leq x_n < \varepsilon$ となり、補題 5.2 の条件が満たされる。 $\square$

補題 5.4. $\lim_{n\to\infty} a_n = A, \lim_{n\to\infty} b_n = B$ であり、$a_n \leq b_n$ の時、$A \leq B$ である。

Proof. $y_n = a_n - A, z_n = b_n - B$ とすると、仮定より $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ かつ $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ である。$x_n = z_n - y_n$ と定義すると補題 3.5 より $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. さらに $c = A - B$ と定義すると仮定 $a_n \leq b_n$ より $x_n \geq c$. 補題 5.3 より $c \leq 0$. $\square$

6 補足

このノートのポイントをいくつか挙げる。

- このノートでは「有界」の定義や、収束列は有界という命題を使っていないが、補題 4.3 の証明などはできている。
- 一般の値への収束をいきなりするよりも、0 への収束をまず十分に議論しておくのが、議論を簡明にするポイントである。
- 最初に数列の収束を学習する時は関数の連続性と混ぜては扱わないが、両方学習した後には、関数の極限と数列の極限を両方使う補題 2.2 を利用すると、方針もわかりやすく証明も易しくなる。
- ε-N 論法で証明された補題を「３段論法で」つなぎあわせる時に、いちいち ε-N 論法に戻るのはゴタゴタして良くない。例えば、ここで与えた補題 4.3 の証明のように、「ε-N 論法に戻らない」で書くと良い。

7 このノートで扱っていない話題

- 有界
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.
- $0 < r < 1$ の場合に $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$.
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ならば $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = 0$.

なお、数列について導いた議論と並行して関数に関する議論を与えることができる。その翻訳が難しい読者のために並行の議論を復唱する。

8　0への収束

補題 8.1. $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ かつ $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ ならば $\lim_{x\to 0} f(g(x)) = 0$.

Proof. 定義より、「$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ |\forall y| < \delta$ に対して $|f(y)| < \varepsilon$」。δ に対して、定義より、「$\exists N,\ \forall n > N$ に対して $|g(x)| < \delta$」。したがって $y = g(x)$ とすることができて、$|f(g(x))| < \varepsilon$. □

第 1 節で示した 3 つの関数の例と合わせて、次の 3 つの場合に応用できる。

補題 8.2. 実数 r を固定する。この時、$\lim_{x\to 0} rf(x) = 0$.

補題 8.3. $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ ならば $\lim_{x\to 0} f(x)^2 = 0$.

補題 8.4. $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. ならば $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{1 - f(x)} = 0$.

9　２つの関数を１つにまとめる技術

補題 9.1. （はさみうち）$|g(x)| \leq f(x)$ だとする。$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ ならば $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$.

Proof. 定義 2.1 から $|g(x)| \leq f(x) < \varepsilon$ が従う。 □

補題 9.2. $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ かつ $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ ならば $\lim_{x\to 0} \max(|f(x)|, |g(x)|) = 0$.

Proof. 定義 2.1 から、$\forall\varepsilon > 0$,
$\exists\delta_1,\ |\forall x| < \delta_1$ に対して $|f(x)| < \varepsilon$ かつ
$\exists\delta_2,\ |\forall x| < \delta_2$ に対して $|g(x)| < \varepsilon$ となる。$\delta := \max(\delta_1, \delta_2)$ と定義する。この時、
$|\forall x| < \delta$ に対して、$\max(|f(x)|, |g(x)|) < \varepsilon$ である。 □

以下では ε-δ 論法に戻ることなく、補題の組み合わせだけで証明する。

補題 9.3. $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ かつ $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ ならば $\lim_{x\to 0}(f(x) + g(x)) = 0$.

Proof. 記号の簡単のため $h(x) = \max(|f(x)|, |g(x)|)$ と定める。
補題 9.2 より $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$.
補題 8.2 の $r = 2$ の時より $\lim_{x\to 0} 2h(x) = 0$.
補題 3.3 より $|f(x) + g(x)| \leq 2h(x)$.
補題 9.1 より $\lim_{x\to 0}(f(x) + g(x)) = 0$. □

補題 9.4. $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ かつ $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ ならば $\lim_{x\to 0}(f(x)g(x)) = 0$.

Proof. 記号の簡単のため $h(x) = \max(|f(x)|, |g(x)|)$ と定める。
補題 9.2 より $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$.
補題 8.3 より $\lim_{x\to 0} h(x)^2 = 0$.
補題 3.4 より $|f(x)g(x)| \leq h(x)^2$.
補題 9.1 より $\lim_{x\to 0}(f(x)g(x)) = 0$. □

10　0 でない極限値への収束

この節では ε-δ 論法に戻ることなく、補題の組み合わせだけで証明する。

定義 10.1. A を実数とする。$\lim_{x\to 0}(f(x)-A)=0$ の時、$\lim_{x\to 0} f(x)=A$ であると定義する。

補題 10.2. $\lim_{x\to 0} f(x)=A$ かつ $\lim_{x\to 0} g(x)=B$ の時、$\lim_{x\to 0}(f(x)+g(x))=A+B$ である。

Proof. $(f(x)+g(x))-(A+B)=(f(x)-A)+(g(x)-B)$ なので、定義 10.1 と補題 9.3 から従う。 □

補題 10.3. $\lim_{x\to 0} f(x)=A$ かつ $\lim_{x\to 0} g(x)=B$ の時、$\lim_{x\to 0}(f(x)g(x))=AB$ である。

Proof. $F(x)=f(x)-A,\ G(x)=g(x)-B$ と定義する。仮定は $\lim_{x\to 0} F(x)=0$ かつ $\lim_{x\to 0} G(x)=0$ と同値である。

$$f(x)g(x)-AB=(F(x)+A)(G(x)+B)-AB=AG(x)+BF(x)+F(x)G(x)$$

を動機とする。補題 8.2 より $\lim_{x\to 0} AG(x)=0,\ \lim_{x\to 0} BF(x)=0$ であり、補題 9.4 より $\lim_{n\to\infty} F(x)G(x)=0$ である。したがって、補題 9.3 より $\lim_{x\to 0}(f(x)g(x)-AB)=0$ であり、定義 10.1 より $\lim_{x\to 0} f(x)g(x)=AB$ である。 □

補題 10.4. $\lim_{x\to 0} f(x)=1$ ならば $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{f(x)}=1.$

Proof. $g(x)=1-f(x)$ とする。仮定は $\lim_{x\to 0} g(x)=0$ と同値である。補題 8.4 より $\lim_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{1-g(x)}=0$ である。$\dfrac{1}{f(x)}-1=-\dfrac{g(x)}{1-g(x)}$ なので、補題 8.2 を $r=-1$ に適用して $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{f(x)}-1=0$ である。したがって、定義 10.1 より $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{f(x)}=1.$ □

補題 10.5. $\lim_{x\to 0} f(x)=A$ で、$A\neq 0$ ならば $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{A}.$

Proof. $g(x)=\dfrac{f(x)}{A}$ とする。補題 10.3 より $\lim_{x\to 0} g(x)=1.$ 補題 10.4 より $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{g(x)}=1.$ 補題 10.3 より $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{A}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{A}\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{A}.$ □

補題 10.6. $\lim_{x\to 0} f(x)=A,\ \lim_{x\to 0} g(x)=B$ で、$A\neq 0$ ならば $\lim_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{B}{A}.$

Proof. 補題 10.5 と補題 10.3. □

11　順序関係は極限で保たれる

補題 11.1. $f(x)\geq c$ かつ $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ ならば $c\leq 0.$

Proof. $c\leq f(x)<\varepsilon$ となり、補題 5.2 の条件が満たされる。 □

補題 11.2. $\lim_{x\to 0} f(x)=A,\ \lim_{x\to 0} g(x)=B$ であり、$f(x)\leq g(x)$ の時、$A\leq B$ である。

Proof. $F(x)=f(x)-A,\ G(x)=g(x)-B$ とすると、仮定より $\lim_{x\to 0} F(x)=0$ かつ $\lim_{x\to 0} G(x)=0$ である。$H(x)=G(x)-F(x)$ と定義すると補題 9.3 より $\lim_{x\to 0} H(x)=0.$ さらに $c=A-B$ と定義すると仮定 $f(x)\leq g(x)$ より $H(x)\geq c.$ 補題 11.1 より $c\leq 0.$ □