実数の性質に関する補足2

落合啓之 (Hiroyuki Ochiai)　　九州大学 (Kyushu University)

Abstract

教科書 (黒田) の実数の性質に関する説明に補足をします。（２）

1　n 乗根

この節では次の定理 (定理 2.11, p50) の証明を復習する。

定理 1.1. $a > 0$ と自然数 n に対して、$b^n = a$ となる $b > 0$ が存在する。

$f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ を $f(x) = x^n$ と定義する[1]。このとき、

1.1　b の候補の定義

補題 1.2. f は単調増加。すなわち $b < c$ ならば $f(b) < f(c)$ である。

Proof. $0 < b < c$ とする。n に関する数学的帰納法で $b^n < c^n$ を示す。$n = 1$ ならば仮定そのままで OK。$n \geq 1$ の時に $b^n < c^n$ が成り立つとすると、$b^{n+1} = bb^n < bc^n < cc^n = c^{n+1}$. □

補題 1.3. 単調増加関数は単射。

$a > 0$ を一つ固定する。

$$B := \{x \in [0, \infty) \mid f(x) \leq a\}$$

と定義する。$0 \in B$ なので B は空集合ではない。

補題 1.4. $\max(1, a)$ は B の上界である。特に B は上に有界。

Proof. 教科書通り、$a > 1$, $0 < a \leq 1$ で場合分けする。

$0 < a \leq 1$ の時、$x \in B$ ならば $x \leq 1$ なので 1 は B の上界。

$a > 1$ の時、$x \in B$ ならば $x^n \leq a \leq a^n$ より $x \leq a$ なので a は B の上界。 □

$b := \sup B$ とする。$f(b) = a$ を示せばよい[2]。

---

[1] 以下の証明では、f の具体的な形はほとんど使わない。使う性質は、f が単調増大であることと、$f(0) = 0$ であること、値域が上に有界であること (これが前半に使うこと)、そして f が連続関数であること (これが後半に使うこと) である。

[2] b が、目的とする「a の n 乗根」となる。

1.2 数列の利用

ところが $f(b)=a$ を直接示すことができないので、「$f(b)\leq a$ と $f(b)\geq a$ の両方を示すことで $f(b)=a$ を示す」という間接的な方法[3]をとる。

そのために、次のような 2 つの数列 $\{b_k\},\{c_k\}$ を考える。まず、定理 2.10 を用いると $b_k\in B$ かつ $b=\lim_{k\to\infty} b_k$ なる数列が存在する。次に $c_k:=b+\frac{1}{k}$ と定義する。上限の定義 (U1) の対偶より「$x>b$ ならば $x\notin B$」である。したがって、$c_k\notin B$ かつ、$b=\lim_{k\to\infty} c_k$ である。まとめると、

- $b=\lim_{k\to\infty} b_k,\ \ f(b_k)\leq a.$
- $b=\lim_{k\to\infty} c_k,\ \ f(c_k)>a$

という数列 $\{b_k\},\{c_k\}$ が準備できた。では、本丸に取り掛かろう。

補題 1.5. $f(b)\leq a.$

Proof. 数列 $\{b_k\}$ を使う。$b=\lim_{k\to\infty} b_k$ の両辺に f を施して

$$f(b)=f(\lim_{k\to\infty} b_k)=\lim_{k\to\infty} f(b_k)$$

となる。なお 2 つ目の等号では (2.37) を使った[4]。$f(b_k)\leq a$ なので、定理 2.9(ii) より $f(b)\leq a$。 □

補題 1.6. $f(b)\geq a.$

Proof. 数列 $\{c_k\}$ を使う。$b=\lim_{k\to\infty} c_k$ の両辺に f を施して

$$f(b)=f(\lim_{k\to\infty} c_k)=\lim_{k\to\infty} f(c_k)$$

となる。なお 2 つ目の等号では (2.37) を使った。$f(c_k)\geq a$ なので、定理 2.9(ii) より $f(b)\geq a$。 □

補題 1.5 と補題 1.6 の証明が全く同じであることに気がつくと理解しやすい。この 2 つの補題の結論を合わせると $f(b)=a$ となる。すなわち、b が a の n 乗根である。(定理 1.1 の証明終わり。)

この節で、証明したことをまとめておくこと、

定理 1.7. $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ を連続関数で、$f(0)=0$ で、像が上に有界でないとする。このとき、任意の $a>0$ に対して、ある $b>0$ がただ一つ存在して $a=f(b)$ となる。すなわち、$g:[0,\infty)\to[0,\infty)$ という f の逆関数 $b=g(a)$ が存在する。

---

[3]後期の数学演習では、2 つの集合 $A,B\subset X$ が等しいことを証明するときに、「$A\subset B$ と $A\supset B$ を証明し、したがって $A=B$ である」という論法が出てくる。それの数字版である。

[4]より一般に f が連続であればこの 2 つ目の等号「f と lim の順序交換」が成立する。

2　アルキメデスの原理

2.1　条件の間の関係を整理する

以下の 5 条件を考える。

(i) $\exists N, \forall n > N, a_n > 0$.

(ii) 有限個の項を除いて $a_n > 0$.

(iii) $\forall n, a_n > 0$.

(iv) $\lim 1/a_n = 0$.

(v) $\lim a_n = +\infty$.

相互の関係は、

(i) と (ii) は同値[5]。

(i) ならば (iii).

「(i) かつ (iv)」は (v) と同値。

(i) の条件のもとで (iv) と (v) は同値。

(iii) の条件のもとで (iv) と (v) は同値。

Proof. どれも証明は簡単であるが、ちょっと記号を準備してみよう。$X := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \leq 0\}$ と定める。この言葉を使って条件 (i)(ii)(iii) を書き換えると、

(ii) X は有限集合。

(iii) X は空集合。

(i) $\exists N$ such that $X \cap \{n \in \mathbb{N} \mid n > N\} = \emptyset$.

(i) は $\exists N$ such that $X \subset \{1, 2, \ldots, N\}$ とも同値である。

では証明に取り掛かる。(i) $\Rightarrow$ (iii) は上の言い換えからわかる。$\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq N\}$ は有限集合なので (i) $\Rightarrow$ (ii) である。一方で有限集合には必ず最大値が存在するので (ii) $\Rightarrow$ (i)。

(v) の定義は、$\forall R > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, a_n > R$。最後の式は $0 < \frac{1}{a_n} < \frac{1}{R}$ と書けるので、(v) は、$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, 0 < \frac{1}{a_n} < \varepsilon$ と同値である。$0 < x < \varepsilon$ は $0 < x$ かつ $|x| < \varepsilon$ なので、これはそれぞれ条件 (i), (iv) に当たる。以上で (v) $\Leftrightarrow$「(i) and (iv)」が示せた。この同値性から最後の 2 つは直ちに出る。 □

2.2　$\lim a_n = +\infty$ なる数列と、和・スカラー倍・はさみうち

補題 2.1. *(i)* $c \in \mathbb{R}, \lim a_n = +\infty$ ならば $\lim(a_n + c) = +\infty$.

(ii) $c > 0, \lim a_n = +\infty$ ならば $\lim ca_n = +\infty$.

(iii) $a_n \geq b_n$ で $\lim b_n = +\infty$ ならば $\lim a_n = +\infty$.

(iv) $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$.

---

[5] ε-N 論法を使うときに、自然数の方も $n > N$ と書くけれど、自然数の大小は実は本質ではない。その条件 $n > N$ は、「有限個の例外を除いて」という条件に他ならない。キーワードは「補有限位相」。

2.3　応用

まずは極限とは関係のない不等式から。

補題 2.2. $c>0$ と自然数 n に対して、

(i) $(1+c)^n \geq 1+nc.$

(ii) $1+\frac{c}{n} \geq (1+c)^{1/n} > 1.$

Proof. (i) は n に関する数学的帰納法。雑に書くと、

$$(1+c)^{n+1} = (1+c)(1+c)^n \geq (1+c)(1+nc) = 1+(n+1)c+nc^2 \geq 1+(n+1)c.$$

(ii) は (i) の c に c/n を代入すると $(1+\frac{c}{n})^n \geq 1+c > 1$ が得られる。この式の n 乗根をとれば、単調性より、結論 $1+\frac{c}{n} \geq (1+c)^{1/n} > 1$ を得る。 □

補題 2.3. *(i)* $\lim_{n\to\infty}(1+c)^n = +\infty.$

(ii) $\lim_{n\to\infty}(1+c)^{1/n} = 1.$

Proof. (i) 補題 2.1 の (i)(ii)(iv) より $\lim(1+nc) = +\infty$. 補題 2.2(i) より目的の式を得る。
(ii) 補題 2.2(ii) と普通のはさみうち (定理 2.9(iii))。 □

2.4

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ の証明 (= 廣島先生の講義の証明。p53, 例 2.13(i) とは異なる証明。) を復習する。

Proof. $a_n := \sqrt[n]{n}-1$ とする。$n \geq 1$ なので単調性より $n^{1/n} \geq 1^{1/n} = 1$. すなわち $a_n > 0$ である。$\lim a_n = 0$ を示すことが目標である。２項定理を用いて、

$$n = (1+a_n)^n \geq 1+na_n+\frac{n(n-1)}{2}a_n^2 > \frac{n(n-1)}{2}a_n^2$$

なので、$n \geq 2$ に対して $a_n^2 < \frac{2}{n-1}$ すなわち、

$$0 < a_n < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} \qquad (n \geq 2)$$

である。ここで $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ なので、はさみうちの原理 (定理 2.9(iii)) より $\lim a_n = 0$ が示せた。 □

ところで教科書だと $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ はどこで証明してあるんだろう？

補題 2.4. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$

Proof. アルキメデスの原理より、$\forall \varepsilon > 0, \exists N > \frac{1}{\varepsilon^2}$。このとき、$\forall n > N$ に対して $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$ なので $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$ □