

行列の積の練習問題4の解答例

version: May 29, 2020

お願い：解答に誤りを見つけたり、説明がわかりづらい点があれば、落合まで連絡してください。
改訂します。

41 (1) $x_1 = 1, x_2 = 2.$

(2) $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2.$

$$(3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_3 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$(4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(5) 解なし。最後の行を見ることによる。

(6) は (2) と同じ。(7) は (3) と同じ。(8) は (5) と同じ。

素材：(1) p20, (2) p21, (3) p32, (4) p30, (5) p29.

途中の計算。(4) を導出する計算はビデオにあります。

検算：例えば、(4) の答えの解を

$$\mathbf{x} = c_3 \mathbf{u}_1 + c_4 \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}$$

と書いたとする。この時に

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

が成り立つことの必要十分条件は、

$$A\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}, A\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}, A\mathbf{v} = \mathbf{b}$$

の3条件が全て成り立つことである。これらを逐一チェックすれば良い。

蛇足：一般論だが、2次方程式 $x^2 - 4x + 3 = 0$ の答えを $x = 1, x = 2$ と書く。

一方、連立1次方程式 $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + y = 3 \end{cases}$ の解を $x = 1, y = 2$ と書く。

このように解を書き表わす際にどちらもカンマ「,」を使っているが、前者では

$$x = 1 \text{ または } x = 2$$

を表し、後者では

$$x = 1 \text{ かつ } y = 2$$

を表しているので、意味は異なる。カンマだけでは、「または」を表すか「かつ」を表すかが決まらない。この曖昧さは文脈（どの場面でその式を使っているのか）でカバーされているので、文脈が通じない局面ではきちんと区別して書く必要がある。数学の講義の中で書くときには上の (1)(2) の書き方で差し支えないが、例えば、(1) の答えを (3) の答えと同じように $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と書けば、曖昧さを避けることができる。