# 練習問題7の解答例

version: July 31, 2020

お願い：解答に誤りを見つけたり、説明がわかりづらい点があれば、落合まで連絡してください。改訂します。

$\boxed{126}$(1) は $\boxed{125}$ を用いてもいいし、用いずに直接解いても良い。

$\boxed{126}$(1) は $\boxed{127}$ を解いて、「その全ての答えが、実数の行列ではない」という方法で解いても良い。

$\boxed{126}$(1) は $\boxed{125}$, $\boxed{127}$ を経由せずに直接解くことも可能である。

さらに $\boxed{126}$ の別の方法：方針。

(4) $A^2 = B$ の時に、$A$ と $B$ は可換であることを示せ。

(5) $B$ が2次の正方行列であり、スカラー行列ではない時、$B$ と可換な行列 $A$ は $A = pB + qE$ と書けることを示せ。ここで $p, q$ はスカラーである。

$\boxed{128}$ ヒント： $A$ が正則ならば $\widetilde{A} = (\det A)A^{-1}$. 従って、${}^t\widetilde{A} = (\det A){}^t(A^{-1}) = (\det A)({}^tA)^{-1} = (\det A)(-A)^{-1} = -(\det A)A^{-1} = -\widetilde{A}$.

$\boxed{129}$ $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$。特に $\widetilde{A}$ は対称行列である。

なお、$A \neq O$ ならば $\mathrm{rank}\widetilde{A} = 1$ となっている。

$\boxed{130}$ (6) 参考：$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} Pf(A_{11}) & Pf(A_{22}) & \cdots & Pf(A_{nn}) \end{pmatrix}$ と行ベクトルを定めると、$\widetilde{A} = {}^t\mathbf{u}\mathbf{u}$ と書くことができて、$A \neq O$ の時は余因子行列 $\widetilde{A}$ は階数が1の対称行列であることが確認できる。

$\boxed{131}$ 解答：方針

(1) $X = NXA$ を用いて、自然数 $i$ に対して、$X = N^iXA^i$ が成り立つことを示す。これを用いて、さらに $N^k = O$ であれば $X = O$ であることを示す。

(3) $X - NXA = Y$ を用いて、0 以上の整数 $i$ に対して、$N^iXA^i - N^{i+1}XA^{i+1} = N^iYA^i$ を示す。この式を足し合わせることで、自然数 $j$ に対して、$X - N^jXA^j = \sum_{i=0}^{j-1} N^iYA^i$ を示す。さらに $N^k = O$ であれば $X = \sum_{i=0}^{k-1} N^iYA^i$ となる。

(2) $X$ の表示より

$$
\begin{aligned}
X - NXA &= \sum_{i=0}^{k-1} N^i Y A^i - \sum_{i=0}^{k-1} N^{i+1} Y A^{i+1} \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} N^i Y A^i - \sum_{i=1}^{k} N^i Y A^i \\
&= Y - N^k Y A^k
\end{aligned}
$$

である。これを用いて、さらに $N^k = O$ であれば、$X - NXA = Y$ を得る。

出典：二木「線型代数学」培風館の補題 6.1.5(p176) の証明、内田ら「線形代数入門」裳華房の定理 7.4.1(p165) の証明。

解釈：$M(m,n)$ から $M(m,n)$ への写像 $X \mapsto X - NXA$ で見ると、(2) より全射であることがわかり、(3) より単射であることがわかる。

$\boxed{132}$ (1) ヒント：$A = D^{-1}, Y = CD^{-1}$ とし、$X - NXA = Y$ を解く。$\boxed{131}$ を用いる。

(2) ヒント $P = \begin{pmatrix} E & X \\ O & E \end{pmatrix}$ の形で探す。(1) を用いる。

$\boxed{133}$ (1) 左辺：$AB = E + \mathbf{bc}$ である。問題 $\boxed{92}$(1) を用いることができて、
$\det(AB) = \det(E + \mathbf{bc}) = 1 + \mathbf{cb}$ となる。

右辺：$A[n+1] = E, B[n+1] = E$ であるので $\det(A[n+1]) = 1, \det(B[n+1]) = 1.$
次に、$i = 1, 2, \ldots, n$ に対しては、$\det(A[i]) = (-1)^{n-i} b_i$, $\det(B[i]) = (-1)^{n-i} c_i$. これらより、(*) の右辺は

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \det(A[i]) \det(B[i]) &= \det(A[n+1]) \det(B[n+1]) + \sum_{i=1}^{n} \det(A[i]) \det(B[i]) \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{n} b_i c_i.
\end{aligned}
$$

これは左辺と一致している。

(3) ヒント：$A[n+1]$ が正則な時、$A$ の第 $(n+1)$ 列を $\mathbf{a}$ とすると、$A = \begin{pmatrix} A[n+1] & \mathbf{a} \end{pmatrix} = A[n+1] \begin{pmatrix} E & \mathbf{b} \end{pmatrix}$, ただし、$A[n+1]\mathbf{b} = \mathbf{a}$ となる。(1) と (2) をうまく使える状況になっていることを確かめる。

(4) 方針：$\boxed{94}$ の活用を考える。

背景：Laplace 展開。